Colección Lambda

Expresiones Algebraicas I

Teoría y práctica

Leyes de exponentes
Ecuaciones exponenciales
Polinomios
Productos notables



ÁLGEBRA



Juan Carlos Ramos Leyva

Entremos juntos en este
apasionante dominio del
álgebra

EXPRESIONES ALGEBRAICAS I

LEYES DE EXPONENTES
ECUACIONES EXPONENCIALES
POLINOMIOS
PRODUCTOS NOTABLES

Teoría y Problemas Selectos

Juan Carlos Ramos Leyva

GRUPO
EDITORIAL



Megabyte

E&M



Megabyte *s.a.c*

GRUPO EDITORIAL

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N° 2014-18342 (Ley N° 26905 / D.S. N° 017-98-ED)
R.U.C. N° 20507993444

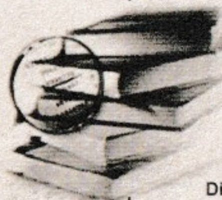
Autor
Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

Diseño de carátula y Diagramación
© Departamento de Edición y Producción GEM

EXPRESIONES ALGEBRAICAS I

Leyes de exponentes - Ecuaciones exponenciales
Polinomios - Productos notables

Primera Edición 2015



Distribución y Ventas
Jr. Rufino Torrico 889 of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110

www.editorialmegabyte.com

Presentación

No cabe duda que el correr del tiempo arrastra consigo grandes cambios en nuestras vidas. De solo pensar en el ayer y compararlo con el hoy nos permite reflexionar para el mañana, pero no nos queda más que vivir el hoy correctamente venciendo todo obstáculo pues asi estaremos preparados para alcanzar el éxito en un mañana.

La experiencia adquirida como docente a lo largo de tantos años laborando en diversas instituciones educativas del pais no podia mantenerme ajeno a los problemas de aprendizaje que enfrenta un estudiante al abordar ciertos temas que se consideran complejos, dichos problemas obedecen a diversos factores siendo uno de los más importantes la falta de un texto teórico - práctico no tan señido al rigor matemático pero si respetando toda la formalidad que la matemática exige.

La presente obra: Expresiones Algebraicas I (Leyes de exponentes, ecuaciones exponenciales, polinomios y productos notables), constituye la base elemental de toda el álgebra en general y consecuentemente de toda matemática real. Con el objetivo de lograr un mejor aprendizaje, nuestra obra consta de tres fases bien definidas:

1.- Exposición de la teoría clara y concreta acompañada de ejercicios de aplicación.

2.- Serie de ejercicios y problemas resueltos ordenados secuencialmente según el grado de dificultad.

3.- Serie de ejercicios y problemas propuestos.

Quiero terminar agradeciendo al Grupo Editorial Megabyte por hacer posible esta publicación, esperando que la presente obra tenga la acogida de mis anteriores publicaciones tanto por los estudiantes como por los colegas de quienes espero sus críticas y/o sugerencias que para mi será muy grato.

A mis queridos padres:
Oscar y Marcelina
A todos los jóvenes estudiantes que van forjando un mejor mañana.

Lic. Juan Carlos Ramos Leyva

E&M

Índice

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1. POTENCIAS EN R

Potenciación.- Es la operación matemática que tiene por objetivo determinar una expresión llamada potencia (p) conociendo previamente otras dos expresiones denominadas base (b) y exponente (n).

$$b^n = p \begin{cases} b = \text{Base} & ; b \in \mathbf{R} \\ n = \text{Exponente} & ; n \in \mathbf{Z} \\ p = \text{Potencia} & ; p \in \mathbf{R} \end{cases}$$

1.1. Definiciones:

1.1A) $\forall a \in \mathbf{R}$

$$a^0 = 1$$

1.1B) $\forall a \in \mathbf{R}$; $n \in \mathbf{Z}^+$

$$a^n = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ \underbrace{a.a.a.....a}_{\textbf{n factores}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

1.1C) $\forall a \in \mathbf{R} - \{0\}$; $n \in \mathbf{Z}^+$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.2. Teoremas

1. 2A) $\forall a \in \mathbf{R}$; $m, n \in \mathbf{Z}$

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

1. 2B) $\forall a \in \mathbf{R} - \{0\}$; $m, n \in \mathbf{Z}$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

1.2C) $\forall a \in \mathbf{R}$; $m, n \in \mathbf{Z}$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

1.1D) $\forall a,b \in \mathbf{R}$; $n \in \mathbf{Z}$

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

1.2E) $\forall a,b \in \mathbf{R} / b \neq 0 ; n \in \mathbf{Z}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

 **Observaciones**

i) Cada vez que el exponente sea negativo la base deberá ser diferente de cero.

ii) Los teoremas también son válidos en el caso de que los exponentes fuesen números reales cualesquiera.

2. RADICALES EN R

Radicación.- Es la operación matemática inversa a la potenciación cuyo objetivo es determinar una expresión llamada raíz (b), conociendo previamente dos espresiones denominadas radicando (a) e índice (n)

$$\sqrt[n]{a} = b \begin{cases} \sqrt{\ } = \text{signo radical} \\ n = \text{índice} ; n \in \mathbf{Z}^+ \\ a = \text{radicando} ; a \in \mathbf{R} \\ b = \text{Raíz} ; b \in \mathbf{R} \end{cases}$$

2.1. Definiciones:

2.1A) $\forall a, b \in \mathbf{R} ; n \in \mathbf{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = b \iff a = b^n$$

2.1B) $\forall a \in \mathbf{R} ; n \in \mathbf{Z}^+$

$$\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & ; n = 1 \\ a^{1/n} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

 **Observación**

Dentro del conjunto de los números reales no se define a la radicación cuando el índice es par y el radicando negativo, razón por la cuál cada vez que el índice sea par el radicando y la raíz deberán ser no negativos.

2.1C) $\forall a, b \in \mathbf{R} ; m \in \mathbf{Z} ; n \in \mathbf{Z}^+ / \exists a^{m/n} \in \mathbf{R}$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$$

2.2. Teoremas

2.2A) $\forall a,b \in \mathbf{R} ; n \in \mathbf{Z}^+ / \sqrt[n]{a} ; \sqrt[n]{b} \in \mathbf{R}$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2.2B) $\forall a,b \in \mathbf{R} ; n \in \mathbf{Z}^+ / \sqrt[n]{a} \in R ; \sqrt[n]{b} \in R - \{0\}$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

2.2C) $\forall a \in \mathbf{R} ; m, n \in \mathbf{Z}^+ / \exists \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \in \mathbf{R}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$$

2.3. Propiedades:

2.3A) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\} ; m, n, p \in \mathbf{Z}^+ ; a, b, c \in \mathbf{Z}$

$$\sqrt[m]{x^a \sqrt[n]{x^b \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an+b)p+c}}$$



2.3B) $\forall x \in \mathbf{R}$; m, n $\in \mathbf{Z}^+$ / n ≥ 2

$$\underbrace{\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x.....\sqrt[n]{x}}}}_{\text{m radicales}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n-1}}}$$

2.3C) $\forall x \in \mathbf{R}$; n $\in \mathbf{Z}^+$ / n ≥ 2

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x.......}}} = \sqrt[n-1]{x}$$

2.3D) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$; m, n, p $\in \mathbf{Z}^+$; a,b, c $\in \mathbf{Z}$

$$\sqrt[m]{x^a \div \sqrt[n]{x^b \div \sqrt[p]{x^c}}} = \sqrt[mnp]{x^{(an-b)p+c}}$$

2.3E) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$; m, n $\in \mathbf{Z}^+$; m = N° impar

$$\underbrace{\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div ....\div\sqrt[n]{x}}}}_{\text{m radicales}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m+1}{n+1}}}$$

2.3F) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$; m, n $\in \mathbf{Z}^+$; m = N° par

$$\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div ....\div\sqrt[n]{x}}} = \sqrt[n^m]{x^{\frac{n^m-1}{n+1}}}$$

2.3G) $\forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$; n $\in \mathbf{Z}^+$

$$\sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x \div \sqrt[n]{x........}}} = \sqrt[n+1]{x}$$

3. ECUACIONES TRASCENDENTES

Concepto.-Se denomina ecuación trascen-dente a toda ecuación no algebraica.

Veamos algunos ejemplos:

* $7^x = 49$; $2^x - x = 7$
* $x^x = 2$; $\cos^2(x) - \log(x) + 1 = x$

3.1. Ecuación Exponencial.

Es aquella ecuación trascendente que presenta a su incógnita formamdo parte de algún exponente.

Veamos algunos ejemplos:

* $3^x = 9$; $5^{2x-1} = 125$; $3^x + 4^x = 5^x$

3.1A.Teorema: $\forall$ a > 0 ; a $\neq$ 1

$$a^x = a^y \longrightarrow x = y$$

3.1B.Propiedad: $\forall$ a, b $\in \mathbf{R}$ / a $\neq$ b

$$a^x = b^x \longrightarrow x = 0$$



Observación

Para resolver algunas ecuaciones trascendentes a veces es necesario recurrir al proceso de comparación comunmente llamado **método de analogía**, el cual consiste en dar forma a una parte de la igualdad tomando como modelo la otra, veamos un ejemplo:

$$x^{x^5} = 5 \quad \leftrightarrow \quad x^{x^5} = \sqrt[5]{5}^{\sqrt[5]{5}^5}$$

$$\therefore \quad x = \sqrt[5]{5}$$

Sin embargo debemos indicar que el método de analogía sólo nos proporciona una solución pudiendo existir otras, sino veamos este otro ejemplo:

En $\sqrt[x]{x} = \sqrt{2}$ se observa que $x = 2$ pero $\sqrt{2} <> \sqrt[4]{4}$, con lo cual tenemos $\sqrt[x]{x} = \sqrt[4]{4}$ de donde $x = 4$.

4. EXPRESIÓN ALGEBRAICA (E.A)

4.1.Definición.-Es la reunión de letras y números (variables y constantes) relacionados entre sí por las seis operaciones matemáticas elementales o alguna combinación de estas en un número limitado de veces.

La representación simbólica que permite reconocer las variables de una expresión es llamada notación matemática, veamos algunos ejemplos:

* $P(x)$ es la expresión P de variable x

$$P(x) \equiv 5x^4 - \sqrt{3}x + \frac{1}{7}$$

* $F(x ; y)$ es la expresión F de variables x, y

$$F(x ; y) \equiv x^6 - xy^{-1} + 5x + y - \frac{2}{x}$$



Observación

En una expresión algebraica ninguna variable podrá formar parte de algún exponente y/o índice de un signo radical, así pues las expresiones:

* $P(x) \equiv 2 + x^2 - 3^x$

* $F(x) \equiv \sqrt[x]{5} - x + 3$

no son algebraicas, al igual que estas otras:

* $Q(x) \equiv 1 + x + x^2 + ...$

* $R(x ; y) \equiv x^3 - \log x + 3\cos(xy) - y$

A todas estas expresiones se les da el nombre de **expresiones trascendentes**.

4.2. Término algebraico

Es la mínima parte de una expresión algebraica, donde no existen operaciones de adición y/o sustracción.

* $P(x) \equiv 3x^7$
* $F(x; y) \equiv -x^{-4}y$

Todo término algebraico presenta tres partes: **coeficiente, variables y exponentes.**

$$M(x ; y) \equiv -4x^7 \; y^{-2/5}$$

Exponentes
variables
coeficiente

4.3. Términos Semejantes

Son aquellos términos que presentan las mismas variables y con respecto a la variable en común iguales exponentes.

$M(x ; y) \equiv 5x^4y^3$; $N(x ; y) \equiv -2x^4y^3$

son semejantes y se les podrá representar así:

$$5x^4y^3 \sim -2x^4y^3$$

4.4. Clasificación de las expresiones algebraicas

I) Expresión algebraica racional(E.A.R)

Es aquella expresión donde sus variables se encuentran afectadas sólo por exponentes enteros y se subdividen en:

I.1) Enteras (E. A.R.E).- Si todas sus variables se encuentran en el numerador afectadas sólo por exponentes na



turales.

* $P(x) \equiv x^4 + \frac{5}{3}x^2 - x + 1$

* $F(x\,;\,y) \equiv 5x^7 - 4xy^3 - \sqrt{2}y$

I.2) Fraccionarias (E.A.R.F).- Si al observar al menos una variable en el denominador, ésta presenta exponte entero positivo

* $P(x) \equiv x^5 - 2x^3 + \frac{1}{x} + 4$

* $F(x\,;\,y) \equiv \frac{5}{x-y} + \frac{x+1}{xy^4} - 2x$

II.Expresión algebraica irracional (E.A.I)
Es aquella expresión donde existe almenos una variable afectada de signo radical o exponente fraccionario.

* $P(x) \equiv x^4 - \sqrt[3]{x} + 7$

* $F(x\,;\,y) \equiv \sqrt[3]{7}x + \sqrt{xy} - \frac{1}{x} + 2$



Observación

Atendiendo al número de términos que posea la expresión algebraica, ésta se puede clasificar como:

Monomio................ 1 término

Binomio.................. 2 términos

Trinomio................. 3 términos

⋮

Multinomio............. "n" términos

5. GRADO DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

5.1.Definición.- Es la categotria que se asigna a una expresión teniendo en cuenta a los exponentes de sus variables.

5.1A) Grado relativo (GR).- Considera a una variable en particular. El grado relativo a una variable es el mayor exponente que presenta dicha variable.

5.1B) Grado Absoluto (GA).- Comunmente llamado **grado**, considera a todas las variables de la expresión.

El grado de una expresión sera igual a la mayor suma de exponentes que presenten las variables en uno de los términos de la expresión.

* $M(x\,;\,y) \equiv 5x^4\,y^{3/2}$

Grado relativo a $x = GR(x) = 4$

Grado relativo a $y = GR(y) = 3/2$

Grado absoluto de $M = GA(M) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$

* $P(x\,;\,y) \equiv 3x^5y^3 - 4x^7y^2 + x + y$

Grado Relativo a $x = GR(x) = 7$

Grado relativo a $y = GR(y) = 3$

Grado absoluto de $P = GA(P) = 7 + 2 = 9$



Observación

El grado de todo número real distinto de cero es igual a cero. El cero no tiene grado definido.

5.2.El grado en las operaciones elementales

Consideremos a las expresiones P y Q, de grados "m" y "n" respectivamente

$[P]^o$ = Grado de P = m

$[Q]^o$ = Grado de Q = n

m, n $\in$ Q de modo que m > n

5.2A) En la adición

$$[P+Q]^o = m$$

5.2B) En la sustracción

$$[P-Q]^o = [Q-P]^o = m$$

5.2C) En la multiplicación

$$[P \,.\, Q]^o = m+n$$

5.2D) En la División

$$\left[\frac{P}{Q}\right]^o = m-n$$

5.2E) En la potenciación

$$[P^k]^o = m.k \quad ; \quad k \in \mathbf{Z}^+$$

5.2F) En la radicación

$$\left[\sqrt[k]{p}\right]^o = \frac{m}{k} \quad ; \quad k \in \mathbf{Z}^+$$

6. VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

6.1. Definición.- Es aquel número real que se obtiene al reemplazar las variables de una expresión por números determinados, veamos algunos ejemplos:

Para $P(x) \equiv x^3 + x - 1$ ¿P(2)?

P(2) es el valor numérico de P cuando x se reemplaza por 2, luego

$P(2) = 2^3 + 2 - 1 = 8 + 1 = 9$

Para $F(x\,;y) \equiv x^2 + \dfrac{x}{y-1} + y$

F(1 ; 2) es el valor numérico de F cuando $x = 1 \;\wedge\; y = 2$, es decir

$$F(1\,;2) = 1^2 + \frac{1}{2-1} + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

6.2. Cambio de variable:

En toda expresión las variables podrán ser sustituidas por otras variables o alguna expresión dando origen a nuevas expresiones, veamos algunos ejemplos

* $P(x) = 2x^2 - x + 3$ ¿P(y)?

Observar que $x \longrightarrow y$

$P(y) \equiv 2y^2 - y + 3$

$F(x) \equiv 3x + 4$ ¿$F(x-2)$?

Observar que $x \longrightarrow x-2$

$F(x-2) \equiv 3(x-2) + 4 \equiv 3x - 6 + 4$

$\therefore\; F(x-2) \equiv 3x - 2$

6.3. Propiedades

6.3A) a,b, c $\in \mathbf{R} - \{0\}$; m $\in \mathbf{Z}^+$

$$F(x) \equiv \frac{ax+b}{cx-a}$$

Si m es par:

$$\underbrace{F(F(F(...(F}_{\textbf{m veces}}(x)).....))) \equiv x$$

Si m es impar:

$$\underbrace{F(F(F(...(F}_{\textbf{m veces}}(x)).......))) \equiv F(x)$$

63B) a, b $\in \mathbf{R}$ / a $\neq 0$, a $\neq 1$; m $\in \mathbf{Z}^+$

$F(x) \equiv ax + b$



$$\underbrace{F(F(F(....(F(x)).......)))}_{\text{m veces}} \equiv a^m x + b\left(\frac{a^m - 1}{a - 1}\right)$$

7. EL POLINOMIO

7.1.Definición 1.- Se denomina así a toda expresión algebraica racional entera.

- $P(x) \equiv x^7 - x^2 + x - 1$
- $F(x\,;\,y) \equiv 3x^2 - xy^4 - y + 6$

7.2. Forma general de un polinomio en variable x ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

Donde:

$a_0, a_1, a_2, ...a_n$ son coeficientes

$$[P]^o = n \quad \leftrightarrow \quad a_0 \neq 0$$

a_0 = coeficiente principal (CP)

a_n = Término independiente de x (TI), también llamada término constante.

7.3. Propiedades:

7.3A) La suma de los coeficientes del polinomio $P(x)$ se obtiene reemplazando x por la unidad

$$\Sigma\text{coef de } P(x) = P(1)$$

7.3B) El término independiente de x en el polinomio $P(x)$ se obtiene reemplazando x por cero.

$$\text{TI de } x \text{ en } P(x) = P(0)$$

7.4. Definición 2.- Polinomio entero en x. Es un polinomio de la forma $P(x)$ cuyo grado es mayor o igual que la unidad, siendo todos sus coeficientes números enteros.

* $P(x) \equiv 2x^7 + x^2 + 4x - 3$ es entero en x

* $F(x) \equiv 5x^4 - \sqrt{2}x + 7$ no es entero en x

¿Por qué? Porque el coeficiente " $-\sqrt{2}$ " no es entero.

7.5. Definición 3.- Polinomio Primitivo.

Es un polinomio entero en x, donde el máximo común divisor de todos sus coeficientes es la unidad.

*$P(x) \equiv 2x^3 - 5x + 6$ es primitivo pues $MCD(2\,;-5\,;6) = 1$

7.6. Definición 4.- Polinomio Mónico.

Es aquel polinomio entero en x cuyo coeficiente principal es la unidad.

* $P(x) \equiv x^5 + 4x^3 - x + 7$ es mónico
* $F(x) \equiv 2x^4 + x + 10$ no es mónico

7.7. Definición 5.- Polinomio Constante.

Es cualquier número real y podrá estar en función de una o más variables.

$M(x) \equiv 2$

$N(x\,;\,y) \equiv -4$

Todo polinomio constante diferente de cero será llamado **constante monómica o constante polinómica**, siendo su grado igual a cero.

8. POLINOMIOS IDÉNTICOS

8.1.Definición.- Dos polinomios de igual grado que se encuentran en función de la misma variable serán idénticos si asumen igual valor numérico para cualquier valor asignado a sus variables.

A continuación presentamos a los polinomios P(x) y Q(x) tales que:

$P(x) \equiv (x+1)^2$ y

$Q(x) \equiv x^2 + 1 + 2x$ son idénticos, pues

$P(a) = Q(a) \quad \forall a \in \mathbf{R}$

8.1A. Propiedad

Si los polinomios

$P(x) \equiv ax^3 + bx + c$

$Q(x) \equiv mx^3 + nx + q$

Son idénticos se les representa así:

$ax^3 + bx + c \equiv mx^3 + nx + q$

y se cumple lo siguiente:

$a = m\ ;\ b = n\ ;\ c = q$

9. POLINOMIOS ESPECIALES

Concepto.- Son aquellos polinomios cuya estructura presenta alguna característica particular

9.1) Polinomio Homogéneo: Cada uno de sus términos presenta igual grado absoluto.

$P(x\ ;\ y) \equiv x^3 - 8xy^2 + x^2y$ es homogéneo de grado 3

9.2) Polinomio Ordenado: Los exponentes de la variable denominada ordenatriz solo aumentan o disminuyen término tras término.

* $P(x) \equiv x^7 - x^2 + x$ ordenado en forma decreciente

* $F(x) \equiv x^3 + x^{10} - x^{21}$ ordenado en forma creciente.

* $M(x\ ;\ y) \equiv x^7y + 2x^4y^3 + xy^5 - y^8$

Ordenado en forma decreciente con respecto a x

Ordenado en forma creciente con respecto a y

9.3) Polinomio completo: Es aquel polinomio que tiene al menos una variable en todos sus términos, la cual posee todos los exponentes naturales desde un número mayor (grado) hasta el exponente cero (término independiente).

$P(x) \equiv x + 5x^2 + 4$. Es un polinomio completo de grado 2.

* $P(x\ ;\ y) \equiv x^4y + 5xy^3 - 2x^2y^2 + x^3$

Es un polinomio completo, pero con respecto a una de sus variables (completo en y)

9.3A. Propiedad

El número de términos que tiene un polinomio completo con respecto a su variable analizada será igual al grado relativo de dicha variable, aumentado en la unidad.

Nº de Términos = GR + 1

9.4) Polinomio identicamente nulo.- Es el cero, no tiene grado definido.

9.4A. Propiedad

Si $P(x) \equiv ax^3 + bx + c$ es un polinomio identicamente nulo se le representa así:

$ax^3 + bx + c \equiv 0$

y se cumple lo siguiente:

$a = 0\ ;\ b = 0\ ;\ c = 0$

E&M





Observación:

Si $P(x)$ es un polinomio literal (grado mayor o igual que uno) de grado "n" que se anula para más de "n" valores de su variable, diremos que $P(x)$ es identicamente nulo.

10. PRODUCTOS NOTABLES

10.1. Multiplicación algebraica

10.1A) Definición.- Es la operación que tiene por objetivo determinar una expresión llamada producto, conociendo previamente otras dos expresiones denominadas factores.

Siendo $A(x)$ y $B(x)$ los factores y $P(x)$ el producto, matemáticamente tenemos:

$$A(x) \,.\, B(x) \equiv P(x)$$

10.1B) Algoritmo de la multiplicación.- La multiplicación de $A(x)$ por $B(x)$ se ejecuta según la ley distributiva de la multiplicación respecto a la adición.

Veamos algunos ejemplos:

* $3x^4 \,.\, (2x+7) \equiv 3x^4 \,.\, 2x + 3x^4 \,.\, 7 \equiv 6x^5 + 21x^4$

* $\underbrace{(5x+2).(3x-4)}_{P(x)} \equiv 5x \,.\, 3x - 5x \,.\, 4 + 2 \,.\, 3x - 2 \,.\, 4$

$$\equiv 15x^2 - 20x + 6x - 8 \equiv 15x^2 - 14x - 8$$

10.1C) Propiedad.- El grado de $P(x)$ se obtiene al sumar los grados de $A(x)$ y $B(x)$, en forma equivalente.

$$[A]^\circ + [B]^\circ = [P]^\circ$$

Veamos un ejemplo:

$$A(x) \equiv 3x^4 \quad y \quad B(x) \equiv 2x + 7$$

$$P(x) \equiv A(x) \,.\, B(x) \quad \rightarrow \quad [P]^\circ = [A]^\circ + [B]^\circ$$

$$[P]^\circ = 4 + 1 = 5$$

10.2. Productos Notables

10.2A) Definición.- Son los resultados de ciertas multiplicaciones que se obtienen en forma directa, esto por la forma que presentan.



Observación:

A los productos notables también se les da el nombre de equivalencias algebraicas.

Ejemplo: Demostrar que $\forall a, b \in \mathbf{R}$ se cumple:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Resolución:

Supongamos que: $P = (a+b)^2$

Por definición tenemos: $P = (a+b).(a+b)$

Por la ley distributiva: $P = a\,.\,a + a\,.\,b + b\,.\,a + b\,.\,b$

$P = a^2 + ab + ba + b^2$

Por la ley conmutativa: $P = a^2 + ab + ab + b^2$

Por la ley asociativa: $P = a^2 + (ab + ab) + b^2$

$P = a^2 + 2ab + b^2$

$$\therefore \boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$ ***Lqqd***

10.3 Principales equivalencias algebraicas.

10.3A) Binomio al cuadrado:

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

* $(2x^3 + 7y^5)^2 = (2x^3)^2 + 2(2x^3)(7y^5) + (7y^5)^2 = 4x^6 + 28x^3y^7 + 49y^{10}$
* $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$
* $(x^2 - 4y)^2 = (x^2)^2 - 2(x^2)(4y) + (4y)^2 = x^4 - 8x^2y + 16y^2$



Observación:

$\forall m \in \mathbf{N}$ se cumple: $(a-b)^{2m} = (b-a)^{2m}$

10.3B) Equivalencias de Legendre:

I. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ II. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4(ab)$

* $(x^2 + y^3)^2 + (x^2 - y^3)^2 = 2[(x^2)^2 + (y^3)^2] = 2(x^4 + y^6)$
* $(x^5 + y^2)^2 - (x^5 - y^2)^2 = 4(x^5\,.\,y^2) = 4x^5y^2$



* $(5x+2y)^2+(5x-2y)^2=2[(5x)^2+(2y)^2]=2(25x^2+4y^2)$
* $(7x+3y)^2-(7x-3y)^2=4(7x\,.\,3y)=84xy$

10.3C) Diferencia de cuadrados:

I. $(a+b).(a-b)=a^2-b^2$

II. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)=a^{2m}-b^{2n}$

* $(x+7).(x-7)=(x)^2-(7)^2=x^2-49$
* $(2x+5y)\,.\,(2x-5y)=(2x)^2-(5y)^2=4x^2-25y^2$
* $(x^2+y^3)\,.\,(x^2-y^3)=(x^2)^2-(y^3)^2=x^4-y^6$

10.3D) Trinomio al cuadrado:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

* $(2x+3y+5)^2=(2x)^2+(3y)^2+(5)^2+2(2x)(3y)+2(2x)(5)+2(3y)(5)$

$\Rightarrow (2x+3y+5)^2=4x^2+9y^2+25+12xy+20x+30y$

* $(x-2y+7)^2=(x)^2+(-2y)^2+(7)^2+2(x)(-2y)+2(x)(7)+2(-2y)(7)$

$\Rightarrow (x-2y+7)^2=x^2+4y^2+49-4xy+14x-28y$

10.3E) Binomio al cubo:

I. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

II. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

* $(x+2)^3=(x)^3+3(x)^2(2)+3(x)(2)^2+(2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

$\Rightarrow (2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+(y)^3$

* $(2x+y)^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$
* $(5x-y)^3=(5x)^3-3(5x)^2(y)+3(5x)(y)^2-(y)^3$

$\Rightarrow (5x-y)^3=125x^3-75x^2y+15xy^2-y^3$

10.3F. Equivalencias de Cauchy:

I. $(a+b)^3=a^3+b^3+3(ab)(a+b)$

II. $(a-b)^3=a^3-b^3-3(ab)(a-b)$

* $(x+4)^3=(x)^3+(4)^3+3(x\,.\,4)(x+4)=x^3+64+12x\,(x+4)$
* $(5x+2y)^3=(5x)^3+(2y)^3+3(5x\,.\,2y)(5x+2y)$

$\Rightarrow (5x+2y)^3=125x^3+8y^3+30xy\,(5x+2y)$

* $(2x-3y)^3=(2x)^3-(3y)^3-3(2x\,.\,3y)(2x-3y)$

$\Rightarrow (2x-3y)^3=8x^3-27y^3-18xy(2x-3y)$

10.3G) Suma y diferencia de cubos:

I. $(a+b)\,.\,(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ II. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

* $(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)=(x^2)^3+(y^3)^3=x^6+y^9$
* $(x+5)\,.\,(x^2-5x+25)=(x)^3+(5)^3=x^3+125$
* $(x-4).\,(x^2+4x+16)=(x)^3-(4)^3=x^3-64$

10.3H) Trinimio al cubo:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(a+c)(b+c)$$

* $(2x+5y+3)^3=(2x)^3+(5y)^3+(3)^3+3(2x+5y)(2x+3)(5y+3)$

$\Rightarrow (2x+5y+3)^3=8x^3+125y^3+27+3(2x+5y)(2x+3)(5y+3)$

Otras equivalencias:

* $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3ab(a+b)+3ac(a+c)+3bc(b+c)+6abc$
* $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$
* $(a+b+c)^3=3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)+6abc$

10.3I) Equivalencias de Steven:

I. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

II. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$

* $(x+5)(x+7)=x^2+12x+35$
* $(x+3)(x-2)=x^2+x-6$



* $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6$
* $(x+2)(x+5)(x-1)=x^3+6x^2+3x-10$

10.3J) Equivalencia de Argan'd: $\forall m, n \in \mathbf{Z}^+$

$$(a^{2m}+a^m b^n+b^{2n}).(a^{2m}-a^m b^n+b^{2n})=a^{4m}+a^{2m}b^{2n}+b^{4n}$$

Casos Particulares

* $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$
* $(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$

10.3K) Equivalencias de Lagrange:

I. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

II. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(az-cx)^2+(bz-cy)^2$

10.3L) Equivalencia de Gauss:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$$

10.3M) Equivalencia adicional:

$$(a+b+c)(ab+ac+bc)=(a+b)(a+c)(b+c)+abc$$

10.4. Igualdades condicionales

Si $a+b+c=0$, se verifican las siguientes igualdades:

10.4A) $a^2+b^2+c^2=-2(ab+ac+bc)$

10.4B) $(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2$

10.4C) $a^3+b^3+c^3=3abc$

10.4D) $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

10.4E) $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}=\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right).\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)$

10.4F) $a^6+b^6+c^6=3(abc)^2-2(ab+ac+bc)$



10.4G) $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)$$

En general $\forall\ n \in \mathbf{Z}^+$:

$$a^{n+3}+b^{n+3}+c^{n+3}=abc(a^n+b^n+c^n)+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1})$$

10.5 Implicancias Notables

Siendo a, b y c números reales, tenemos:

10.5A) Si: $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$

Entonces: $a=b=c$

Demostración:

Por condición tenemos que:

$$a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$$

Multiplicando por 2 a ambos miembros.

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2ac+2bc$$

Reescribiendo en el primer miembro con la finalidad de completar cuadrados.

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2=0$$

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0$$

Como a, b y c son reales es evidente que $a-b$, $a-c$ y $b-c$ son reales, la única posibilidad que la igualdad anterior se verifique es que:

$$(a-b)^2=0\wedge(a-c)^2=0\wedge(b-c)^2=0$$

$$a-b=0\wedge a-c=0\wedge b-c=0$$

$$a=b\wedge a=c\wedge b=c$$

$$\therefore\quad a=b=c$$ Lqqd

10.5B) Si: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Entonces $a=b=c\ \vee\ a+b+c=0$

Demostración:

Por condición tenemos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

Según la equivalencia de Gruss:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) = 0$$

Por el teorema del producto nulo:

$$a + b + c = 0 \ \vee \ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$$

$$a + b + c = 0 \ \vee \ \underbrace{a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc}_{\text{Segun 10.5A: } a = b = c}$$

$$\therefore \quad a + b + c = 0 \vee a = b = c \qquad \text{Lqqd}$$

10.5C) Si: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Entonces $a = -b \ \vee \ a = -c \ \vee \ b = -c$

Demostración:

Por condición tenemos que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(a + b + c)(ab + ac + bc) = abc$$

Según la equivalencia adicional:

$$(a + b)(a + c)(b + c) + abc = abc$$

$$(a + b)(a + c)(b + c) = 0$$

Por el teorema del producto nulo:

$$a + b = 0 \ \vee \ a + c = 0 \ \vee \ b + c = 0$$

$$\therefore \quad a = -b \ \vee \ a = -c \ \vee \ b = -c \qquad \text{Lqqd}$$

Ejemplo:

Si $x, y \wedge z \in \mathbb{R}$ tal que $x(x - y) + y(y - z) + z(z - x) = 0$

Calcular el equivalente de:

$$E = \frac{x^4 + y^4 + z^4 + xy^2z}{x^2y^2 - x^2z^2 + y^2z^2}$$

Resolución:

Por condición tenemos:

$$x(x-y)+y(y-z)+z(z-x)=0$$
$$x^2-xy+y^2-yz+z^2-xz=0$$
$$x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$$

Por implicancia notable:

$$x=y=z$$

Finalmente tenemos:

$$E=\frac{x^4+x^4+x^4+x^4}{x^4-x^4+x^4}=\frac{4x^4}{x^4}$$

$$\therefore \quad E=4$$



Observación:

Siendo a, b y c números reales; m, n y p números enteros positivos, dentro del conjunto de los números reales debemos considerar:

i) Si: $a^{2m}+b^{2n}+c^{2p}=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \;\wedge\; b=0 \;\wedge\; c=0$

ii) Si: $\sqrt[2m]{a}+\sqrt[2n]{b}+\sqrt[2p]{c}=0 \quad \Rightarrow \quad a=0 \;\wedge\; b=0 \;\wedge\; c=0$

Ejemplo:

Si x, y $\in$ **R** tal que: $x^2+2y^2+2=2x+2xy$. Calcular: $E=\sqrt[xy]{x^y-y^x}$

Resolución:

Por condición tenemos: $x^2+2y^2+2=2x+2xy$

Multiplicando por 2: $2x^2+4y^2+4=4x+4xy$

Igualando a cero: $2x^2+4y^2+4-4x-4xy=0$

Completando cuadrados: $(x^2-4x+4)+(x^2-4xy+4y^2)=0$

$$(x-2)^2+(x-2y)^2=0$$

Por la observación: $(x-2)^2=0 \;\wedge\; (x-2y)^2=0$

$$x-2=0 \;\wedge\; x-2y=0$$



$$x = 2 \quad \wedge \quad x = 2y$$
$$x = 2 \quad \wedge \quad y = 1$$

Finalmente tenemos:

$$E = \sqrt[2.1]{2^1 - 1^2} = \sqrt[2]{2-1} = \sqrt{1}$$

$\therefore$ **E = 1**

Ejercicios de Aplicación

Ejercicio 1

Reducir: $E = 4^{-2^{-1}} + 27^{-3^{-1}} + 36^{-2^{-1}}$

Resolución:

Dando uso de las definiciones para exponentes procedemos de la manera siguiente:

$$E = 4^{-\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} + 36^{-\frac{1}{2}}$$

$$E = \sqrt{4}^{-1} + \sqrt[3]{27}^{-1} + \sqrt{36}^{-1}$$

$$E = 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1}$$

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6}$$

$$E = \frac{6}{6} = 1$$

Ejercicio 2

Simplificar:

$$E = \frac{5^{x+7} - 5^{x+5}}{5^{x+4}} \quad ; \; x \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$$

Resolución:

Reescribiendo la expresión dada:

$$E = \frac{5^{x+7}}{5^{x+4}} - \frac{5^{x+5}}{5^{x+4}}$$

$$E = 5^{7-4} - 5^{5-4} = 5^3 - 5^1$$

$$E = 125 - 5 = 120$$

Ejercicio 3

Simplificar:

$$E = \frac{x^2 . x^4 . x^6 . x^8 .... x^{200}}{x . x^3 . x^5 . x^7 .... x^{199}} \; ; x \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$$

Resolución:

Fácilmente podemos notar que en el numerador, así como en el denominador, existen 100 factores. Reescribiendo en forma conveniente:

$$E = \left(\frac{x^2}{x}\right) \cdot \left(\frac{x^4}{x^3}\right) \cdot \left(\frac{x^6}{x^5}\right) \cdot \left(\frac{x^8}{x^7}\right) ...... \left(\frac{x^{200}}{x^{199}}\right)$$

Por teorema:

$$E = \underbrace{(x)(x)(x)(x) .... (x)}_{\textbf{100} \text{ factores}} = x^{100}$$

Ejercicio 4

Reducir:

$$K = \sqrt[m]{\frac{5^m + 1}{5^{-m} + 1}} + \sqrt[n]{\frac{3^{-n} + 1}{3^n + 1}} \; ; \, m, n \in \mathbf{N} - \{0; 1\}$$

Resolución:

De acuerdo con la definición del exponente negativo, procedemos de la mane

ra siguiente:

$$K=\sqrt[m]{\frac{5^m+1}{\frac{1}{5^m}+1}}+\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{3^n}+1}{3^n+1}}$$

$$K=\sqrt[m]{\frac{(5^m+1)(5^m)}{1+5^m}}+\sqrt[n]{\frac{1+3^n}{(3^n+1)(3^n)}}$$

$$K=\sqrt[m]{5^m}+\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}$$

$$K=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$$

Ejercicio 5

Calcular x en:

$$\sqrt{5}^{x-1}=\sqrt[3]{25}^{x+1}$$

Resolución:

Espresando en función de la base cinco, la ecuación dada se puede reescribir así:

$$\sqrt{5}^{x-1}=\sqrt[3]{(5^2)}^{x+1}$$

$$\sqrt{5}^{x-1}=\sqrt[3]{5}^{2x+2}$$

$$5^{\frac{x-1}{2}}=5^{\frac{2x+2}{3}}$$

Por teorema $\frac{x-1}{2}=\frac{2x+2}{3}$

$$3x-3=4x+4$$

$$\therefore \quad x=-7$$

Ejercicio 6

Calcular x en: $\quad 7^{2x-1}=5^{x-0,5}$

Resolución:

La ecuación dada es:

$$7^{2x-1}=5^{x-\frac{1}{2}}$$

$$7^{2x-1}=5^{\frac{2x-1}{2}}$$

$$7^{2x-1}=\sqrt{5}^{2x-1}$$

Por propiedad: $\quad 2x-1=0$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{2}$$

Ejercicio 7

Calcular x en:

$$3^{x+2}+3^{x+1}+3^{x-1}=37$$

Resolución:

En el 1[er] miembro al extraer la potencia de menor exponente:

$$3^{x-1}(3^3+3^2+1)=37$$

$$3^{x-1}.(37)=37$$

$$3^{x-1}=1$$

Por definición: $\quad x-1=0$

$$\therefore \quad x=1$$

Ejercicio 8

Determine un valor de x en:

$$x^{x^{13}}=13$$



Resolución:

La ecuación dada es: $x^{x^{13}} = 13$

Elevando al exponente 13:

$$x^{x^{13}} = 13$$

$$(x^{x^{13}})^{13} = (13)^{13}$$

$$(x^{13})^{(x^{13})} = (13)^{13}$$

Por comparación: $x^{13} = 13$

$$\therefore \quad x = \sqrt[13]{13}$$

Ejercicio 9

Calcular "x" en: $x^{x^{x^2+2}} = 4$

Resolución:

La ecuación es: $x^{x^{x^2+2}} = 4$

$$x^{x^{x^2}.x^2} = 4$$

$$x^{x^2.x^{x^2}} = 4$$

$$\left(x^{x^2}\right)^{\left(x^{x^2}\right)} = 2^2$$

Por comparación: $x^{x^2} = 2$

$$\therefore \quad x = \sqrt{2}$$

Ejercicio 10

Simplificar: $E = \dfrac{\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8.......}}}}{\sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div \sqrt[3]{16 \div ....}}}}$

Resolución:

Por teorema: $E = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[4]{16}} = \dfrac{2}{2}$

$$\therefore \quad E = 1$$

Ejercicio 11

¿Cuántos polinomios de la forma:

$P(x\ ;\ y) \equiv x^{n-7} + (n-2)x^n y^2 + ny^{9-n}$ existen?

Resolución:

Por ser polinomio n – 7, n y 9 – n deben ser números naturales, esto es:

$$\left.\begin{array}{r} n-7 \in \mathbf{N} \\ n \in \mathbf{N} \\ 9-n \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \quad 7 \le n \le 9 \ :\ n = 7\ ;\ 8 \text{ y } 9$$

∴ Existen 3 polinomios de la forma dada

Ejercicio 12

Calcular la suma de coeficientes y el término independiente de x en $P(x)$ a partir del polinomio $P(x-3) \equiv x^2 - 4x + 7$

Resolución:

I) P(1) = suma de coeficientes en $P(x)$, luego:

$$x - 3 = 1$$

$$x = 4$$

$$P(1) = (4)^2 - 4(4) + 7$$

$$P(1) = 16 - 16 + 7 = 7$$

II) P(0) = término independiente de x en $P(x)$, luego: $x - 3 = 0$

$$x = 3$$

$P(0) = (3)^2 - 4(3) + 7$

$P(0) = 9 - 12 + 7 = 4$

Ejercicio 13

Si $P(2x-1) \equiv 4x^2 + 8x - 1$

Determine $P(1-x)$

Resolución:

En el polinomio dado hagamos:

$$2x - 1 = \mu$$

$$x = \frac{\mu + 1}{2}$$

Ahora reemplazando tenemos:

$$P(\mu) \equiv 4\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2 + 8\left(\frac{\mu+1}{2}\right) - 1$$

$$P(\mu) \equiv 4\left(\frac{\mu^2+2\mu+1}{4}\right) + 8\left(\frac{\mu+1}{2}\right) - 1$$

$P(\mu) \equiv \mu^2 + 2\mu + 1 + 4\mu + 4 - 1$

$P(\mu) \equiv \mu^2 + 6\mu + 4$

Finalmente reemplazamos "μ" por "$1-x$"

$P(1-x) \equiv (1-x)^2 + 6(1-x) + 4$

$P(1-x) \equiv 1 - 2x + x^2 + 6 - 6x + 4$

$\therefore\ P(1-x) \equiv x^2 - 8x + 11$

Ejercicio 14

Calcular "m.n" si el polinomio:

$$P(x\,;\,y) \equiv x^{m-4} + x^2y^3 + my^{n+1}$$

es homogéneo

Resolución:

De acuerdo con la teoría se cumple que:

$m - 4 = 5 \ \wedge\ n + 1 = 5$

$m = 9 \ \wedge\ n = 4$

$\therefore\quad mn = 36$

Ejercicio 15

Calcular a.b.c si el polinomio:

$$P(x) \equiv ax^{c-4} + bx^{b-3} + cx^{a-2}$$

es completo y ordenado

Resolución:

Como no se especifica el orden, debemos plantear los dos casos, veamos:

I) En forma creciente

$c - 4 = 0 \ \wedge\ b - 3 = 1 \ \wedge\ a - 2 = 2$

$c = 4 \ \wedge\ b = 4 \ \wedge\ a = 4$

$\therefore\ abc = 64$

II) En forma decreciente

$c - 4 = 2 \ \wedge\ b - 3 = 1 \ \wedge\ a - 2 = 0$

$c = 6 \ \wedge\ b = 4 \ \wedge\ a = 2$

$\therefore\ abc = 48$

Ejercicio 16

Si: $P(x) \equiv Q(x)$. Calcular $m^2 + n^2$; donde:

$P(x) \equiv 7x + m - 4$

$Q(x) \equiv (m+n)x + n + 1$

Resolución:

Por identidad:

$m + n = 7 \quad \leftrightarrow \quad m + n = 7$

$m - 4 = n + 1 \ \leftrightarrow \quad m - n = 5$

Sumando: $2m = 12$



$$m = 6$$

Restando: $2n = 2$

$$n = 1$$

$$\therefore \quad m^2 + n^2 = 37$$

Ejercicio 17

Si: $P(x) \equiv (a-1)x^3 + (a-b+3)x + b - c \equiv 0$

Calcular: $a + b^2 + c$

Resolución:

De acuerdo con la teoría, se cumple:

$$a - 1 = 0 \ \wedge \ a - b + 3 = 0 \ \wedge \ b - c = 0$$

$$a = 1 \ \wedge \ 1 - b + 3 = 0 \ \wedge \ b = c$$

$$a = 1 \ \wedge \qquad b = 4 \ \wedge \ c = 4$$

$$\therefore \ a + b^2 + c = 21$$

Ejercicio 18

Si: $x + y = 4 \ \wedge \ xy = 2$

Calcular: $E = x^2 + x^3 + y^2 + y^3$

Resolución

La expresión pedida es:

$$E = x^2 + y^2 + x^3 + y^3$$

Hallemos $x^2 + y^2$, iniciando: $x + y = 4$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 16$$

$$x^2 + y^2 + 2(2) = 16$$

$$x^2 + y^2 + 4 = 16$$

$$x^2 + y^2 = 12$$

Hallemos $x^3 + y^3$, iniciando: $x + y = 4$

Elevando al cubo, Cauchy:

$$x^3 + y^3 + 3(xy)(x + y) = 64$$

$$x^3 + y^3 + 3(2)(4) = 64$$

$$x^3 + y^3 + 24 = 64$$

$$x^3 + y^3 = 40$$

Finalmente tenemos:

$$E = 12 + 40$$

$$\therefore \quad E = 52$$

Ejercicio 19

Si: $x - x^{-1} = 10$. Calcular $x^3 - x^{-3}$

Resolución:

Por condición tenemos: $x - x^{-1} = 10$

Elevando al cubo, Cauchy:

$$(x - x^{-1})^3 = (10)^3$$

$$x^3 - x^{-3} - 3\underbrace{(x \, . \, x^{-1})}_{1}\underbrace{(x - x^{-1})}_{10} = 1000$$

$$x^3 - x^{-3} - 30 = 1000$$

$$\therefore \quad x^3 - x^{-3} = 1030$$

Ejercicio 20

Si $a + b = 7 \wedge ab = 3$. Calcular : $a - b$

Resolución:

Por la equivalencia de Legendre:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4(ab)$$

$$49 - (a - b)^2 = 12$$

$$37 = (a - b)^2$$

$$\therefore \quad a - b = \pm\sqrt{37}$$

Ejercicio 21

Si: $a + b + c = 10$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 100$$

Calcular:

$$E=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

Resolución:

De la condición:

$$a+b+c=10\ \begin{cases} a+b=10-c \\ a+c=10-b \\ b+c=10-a \end{cases}$$

En la expresión:

$$E=(10-c)^2+(10-b)^2+(10-a)^2$$

Efectuando tenemos:

$$E=100-20c+c^2+100-20b+b^2+100-20a+a^2$$

$$E=300+a^2+b^2+c^2-20(a+b+c)$$

Finalmente obtenemos:

$$E=300+100-20(10)$$

$$E=400-200$$

$$\therefore\quad E=200$$

Ejercicio 22

Reducir:

$$E=(x+7)(x+3)-(x+4)(x+6)+4$$

Resolución:

Dando uso de la equivalencia de Steven, la espresión propuesta será:

$$E=x^2+10x+21-(x^2+10x+24)+4$$

$$E=x^2+10x+21-x^2-10x-24+4$$

$$E=21-24+4$$

$$\therefore\ E=1$$

Ejercicio 23

Reducir:

$$E=\sqrt[8]{1+24(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)}$$

Resolución:

Tenga en cuenta que $24=5^2-1$, luego la expresión propuesta será:

$$E=\sqrt[8]{1+\underbrace{\underbrace{\underbrace{(5^2-1)(5^2+1)}_{5^4-1}(5^4+1)}_{5^8-1}(5^8+1)}_{5^{16}-1}}$$

$$E=\sqrt[8]{1+5^{16}-1}=\sqrt[8]{5^{16}}=5^2$$

$$\therefore\quad E=25$$

Ejercicio 24

Si: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{x+y}$

Calcular: $E=\dfrac{3x+5y}{3x-y}$

Resolución:

De la condición:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$$

Efectuando tenemos:

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{4}{x+y}$$

$$(x+y)^2=4xy$$

$$x^2+2xy+y^2=4xy$$

$$x^2-2xy+y^2=0$$

$$(x-y)^2=0$$

De esto último: $x=y$

Finalmente tenemos:



$$E=\frac{3x+5x}{3x-x}=\frac{8x}{2x}$$

$\therefore \quad E=4$

Ejercicio 25

Si x, y $\in$ **R** tal que:

$$5x^2+y^2+1=2x(2y+1)$$

Calcular: $K=x^3+y^2-xy$

Resolución:

La condición dada es :

$$5x^2+y^2+1=4xy+2x$$

$$5x^2+y^2+1-4xy-2x=0$$

Agrupando convenientemente:

$$x^2-2x+1+4x^2-4xy+y^2=0$$

$$(x-1)^2+(2x-y)^2=0$$

Como x, y $\in$ **R**, se cumple:

$$(x-1)^2=0 \quad \wedge \quad (2x-y)^2=0$$

$$x-1=0 \wedge 2x-y=0$$

$$x=1 \quad \wedge \quad y=2x$$

$$x=1 \quad \wedge \quad y=2$$

Finalmente tenemos:

$$K=(1)^3+(2)^2-(1)(2)$$

$$K=1+4-2$$

$\therefore \quad K=3$

Ejercicio 26

El polinomio:

$$P(x\,;y)\equiv 3^5x^{n+3}y^{m-2}+x^{n+2}y^{m-3}$$

Es de grado 11 y verifica:

$$GR(x)-GR(y)=5$$

Luego "m – n" es:

A) –1 B) 0 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

Por condición:

$$[P]^o=11 \leftrightarrow m+n+1=11$$

$$m+n=10 \quad ...(1)$$

Por condición: $GR(x)-GR(y)=5$

$$n+3-(m-2)=5$$

$$n+3-m+2=5$$

$$n-m+5=5$$

$\therefore \quad m-n=0$

Clave B

Observación: Para resolver el ejercicio no fue necesario utilizar la primera condición, pues lo pedido se formó de la segunda condición.

Ejercicio 27

Determine la suma de los coeficientes del siguiente trinomio:

$$P(x\,;y)\equiv(m-3)x^{9-m}+mx^{m-2}y^{m/3}+y^{17-2m}$$

A) 10 B) 8 C) 6

D) 4 E) 2

Resolución:

Fácilmente podemos observar que:

$$m-3\neq 0\,;\, m\neq 0$$

$$m\neq 3\,;\, m\neq 0$$

Pues un trinomio es un polinomio de tres términos y con la restricción planteada antes se garantiza la condición dada.

Como los exponentes, de acuerdo a la teo

ría, son números naturales:

$9-m \in \mathbf{N} \rightarrow 9-m \geq 0$ .... (1)

$m-2 \in N \rightarrow m-2 \geq 0$ .... (2)

$\frac{m}{3} \in N \rightarrow m=3$ .... (3)

$17-2m \in N \rightarrow 17-2m \geq 0$ .... (4)

De (1), (2) y (4) se cumple:

$$2 \leq m \leq 8{,}5$$

De (3) m es múltiplo de 3:

$$m=3 \text{ ó } m=6$$

Por restricción tenemos: $m=6$

Finalmente se plantea:

$P(1\,;1)=m-3+m+1$

$P(1\,;1)=2m-2$

$P(1\,;1)=2(6)-2=12-2$

$\therefore \quad P(1\,;1)=10$

Clave A

Ejercicio 28

Indique uno de los grados absolutos que puede asumir el polinomio:

$$P(x\,;y) \equiv 5x^{n-2} + 6x^{\frac{8}{n-1}} + 9x^{5-n}y$$

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

Resolución:

Por ser polinomio, se cumple:

$n-2 \in \mathbf{N} : n-2 \geq 0$ ...(1)

$\frac{8}{n-1} \in \mathbf{N} : n-1 = \text{divisor de } 8$ ...(2)

$5-n \in \mathbf{N} : 5-n \geq 0$ ...(3)

De (1) y (3) se cumple: $2 \leq n \leq 5$

Los valores naturales de n:

$$n = 2\,;3\,;4\,;5$$

De (2) "n - 1" es divisor de 8:

$$n=2\,;n=3 \text{ ó } n=5$$

Finalmente los polinomios son:

$P(x\,;y) \equiv 5+6y^8+9x^3y$

$P(x\,;y) \equiv 5x+6x^4+9x^2y$

$P(x\,;y) \equiv 5x^3+6x^2+9y$

Clave D

Ejercicio 29

Si la expresión:

$$F(x) = b(x^a+1)^{a+b} + \left(1-\frac{8}{a-1}\right)x^{-5} + \left(1-\frac{9}{b-2}\right)|x| + a^2 + a$$

Es un polinomio. Indique cuál(es) de los enunciados son correctos

I) $GR(F)=180$

II) El término constante es la mitad del grado.

II) La suma de coeficientes de $F(x)$ es 101

A) I, II y III B) Sólo I C) Sólo II

D) Sólo III D) I, III

Resolución:

Por ser polinomio se cumple

$1-\frac{8}{a-1}=0 \quad \leftrightarrow \quad 1=\frac{8}{a-1}$

$a-1=8 \quad \leftrightarrow \quad a=9$

Por ser polinomio se cumple:



$$1-\frac{9}{b-2}=0 \quad \leftrightarrow \quad 1=\frac{9}{b-2}$$

$$b-2=9 \quad \leftrightarrow \quad b=11$$

Ahora el polinomio dado es: $F(x) \equiv 11(x^9+1)^{20}+90$

De acuerdo con los enunciados: $GR(F)=9.(20)=180$ ¡correcto!

$F(0)=11(1)+90=101$ ¡incorrecto!

$F(1)=11(2)^{20}+90$ ¡incorrecto!

Clave B

Ejercicio 30

Se define el polinomio:

$$P(x\,;\,y) \equiv 2^2x^{a+b-4}\,y^{a+b+3}+x^{2a+b-3}y^{a+b+1}+x^{2a+b-2}y^{a+b+2}$$

de grado absoluto 41 y la diferencia de los grados relativos a $x \wedge y$ es 2. Determine el valor de $E=\dfrac{a+b+1}{b-a}$

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 10

Resolución:

Por condición se plantea: $[P]^{o}=41$

$$3a+2b=41 \qquad ...(1)$$

Por condición se plantea: $GR(x)-GR(y)=2$

$$2a+b-2-(a+b+3)=2$$

$$2a+b-2-a-b-3=2$$

$$a=7 \qquad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1): $3(7)+2b=41 \quad \Leftrightarrow \quad 21+2b=41$

$$2b=20 \quad \Leftrightarrow \quad b=10$$

Finalmente tenemos: $E=\dfrac{7+10+1}{10-7}=\dfrac{18}{3}$

$$\therefore \quad E=6$$

Clave C

Ejercicio 31

Dado el polinomio:

$$P(x\,;\,y) \equiv 2x^{2a-6}y^5 - 3x^{a+2}y^{a-4} + x^3y^{2a-7} - x^{a-5}y^{a-9}$$

Calcular el mínimo grado absoluto.

A) 12 B) 13 C) 15 D) 16 E) 17

Resolución:

Por tratarse de un polinomio, cada exponente de $x \wedge y$ deberá ser un número natural. Una rapida inspección permite observar que: $a-9 \geq 0 \quad \leftrightarrow \quad a \geq 9$

Fácilmente podemos reconocer que: $[P]^o = 2a - 1$

Ahora considerando el menor valor de "a": $[P]^o_{mín} = 2(9) - 1$

$[P]^o_{mín} = 18 - 1$

$\therefore \quad [P]^o_{mín} = 17$

Clave: E

Ejercicio 32

El polinomio: $P(x) \equiv (9x^8 - 7)^n \,.\, (2x^2 + 3x^3 - 1)^{n-2}.(x^9 + 3)$

Tiene como grado 47, entonces se puede afirmar que

$\sqrt[5]{\text{coeficiente principal de } P(x)}$ es:

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 27

Resolución:

Por condición tiene: $[P]^o = 47$

$8(n) + 3(n-2) + 9 = 47$

$8n + 3n - 6 + 9 = 47$

$11n = 44 \rightarrow n = 4$

De acuerdo con la teoría: $C.P = (9)^n \,.\, (3)^{n-2} \,.\, (1)$

Reemplazando $n = 4$: $C.P = (9)^4 \,.\, (9) = 9^5$

Finalmente se tendrá: $\sqrt[5]{C.P} = \sqrt[5]{9^5}$

$\therefore \quad \sqrt[5]{C.P} = 9$

Clave: C



Ejercicio 33

Indique cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $P(x) \equiv 6x^3 + 5x^2 + 6\,|\,x\,| + 1$ es un polinomio ordenado.

II. $Q(x) \equiv 1 + x^2 - x + 3x^3$ es un polinomio ordenado.

III. $H(x\,;\,y) \equiv x^3y + xy^3 + x^2y^2$ es un polinomio homogéneo.

A) I, II y III B) I y III C) II y III D) I y II E) Sólo III

Resolución:

De acuerdo con la teoría expuesta en la segunda unidad, procedemos a sentenciar a cada enunciado.

I. Falso ¿Por qué? Porque según la definición $P(x)$ no es un polinomio

II Falso ¿Por qué? Porque según la definición $Q(x)$ no es ordenado

III Verdadero. Es evidente que $H(x;\,y)$ es homogéneo de cuarto grado.

Clave E

Ejercicio 34

Si el polinomio: $P(x\,;\,y) \equiv 2^{-1}(a+b)x^{a^2+n} - y^{b^2+12} + 3^{-1}(a-b)x^{b^2+n}y^n$

Es homogéneo determine el producto de sus coeficientes.

A) –2 B) –1 C) 0 D) 2 E) 3

Resolución:

Se pide calcular: $E = 2^{-1}(a+b).\,(-1).3^{-1}(a-b)$

$$E = -\frac{1}{2}(a+b).\frac{1}{3}(a-b)$$

$$E = -\frac{1}{6}(a^2-b^2) \qquad \text{....(1)}$$

Por condición se cumple: $a^2 + n = b^2 + 12 = b^2 + 2n$

Por izquierda tenemos: $a^2 + n = b^2 + 12$

$$a^2 - b^2 = 12 - n \qquad \text{.....(2)}$$

Por derecha tenemos: $b^2 + 12 = b^2 + 2n$

$$12 = 2n$$

$$6 = n$$

Reemplazando en (2): $a^2 - b^2 = 12 - 6$

$$a^2 - b^2 = 6$$

Finalmente en (1) tenemos: $E = -\dfrac{1}{6}(6)$

$\therefore \quad E = -1$

Clave: B

Ejercicio 35

Si se cumple que:

$$A(x-1)(x-3) + B(x-1)(x+5) + C(x-3)(x+5) \equiv 10x^2 - 44x + 58 \; ; \forall x \in \mathbf{R}$$

Cuál (es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $A + B + C = 10$

II. $A = B^2 + C^2 - 3BC$

III. $A > C > B$

A) I y II B) II y III C) I y III D) Sólo II E) Sólo III

Resolución:

Haciendo $x = 1$ tenemos: $C(-2)(6) = 10(1)^2 - 44(1) + 58$

$$-12C = 24$$

$$C = -2$$

Haciendo $x = 3$ tenemos: $B(2)(8) = 10(3)^2 - 44(3) + 58$

$$16B = 16$$

$$B = 1$$

Haciendo $x = -5$ tenemos: $A(-6)(-8) = 10(-5)^2 - 44(-5) + 58$

$$48A = 528$$

$$A = 11$$

Analizando cada enunciado:
(I) verdadero
(II) verdadero
(III) falso

Clave: A

Ejercicio 36

Sea $P(x\,;\,y\,;\,z)$ un polinomio homogéneo de grado 3 que cumple: $P(1; 2; -1) = 4$. Determine el valor de $P(-4; -8; 4)$.

A) –256 B) –128 C) –32 D) –16 E) 64

Resolución:

Si $P(x_1; x_2; x_3;........; x_m)$ es un polinomio homogéneo de grado "n" se verifica la relación de "L. Euler".

$$P(kx_1; kx_2; kx_3;.........kx_m) = k^n.P(x_1; x_2; x_3;......; x_m)$$

En el problema tenemos: $P(-4; -8 : 4) = P[\underbrace{(-4).1 ; (-4).2 ; (-4).-1}_{\text{observa que } k=-4}]$

$P(-4 ; -8 ; 4) = (-4)^3 . P(1 ; 2; -1)$

Reemplazando el dato: $P(-4; -8; 4) = (-64).(4)$

$\therefore \quad P(-4; -8 ; 4) = -256$

Clave A

Ejercicio 37

Si el polinomio: $P(x) \equiv (ab - ac - n^2)x^2 + (bc - ba - 2n)x + (ca - bc - 1)$ es identicamente nulo. Determine el valor de: $E = \frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Resolución:

De acuerdo con la teoría se cumple: $ab - ac - n^2 = 0 \leftrightarrow ab - ac = n^2$ ....(1)

$bc - ba - 2n = 0 \leftrightarrow bc - ab = 2n$ ....(2)

$ca - bc - 1 = 0 \leftrightarrow ac - bc = 1$ ....(3)

Sumando (1), (2) y (3) tenemos: $0 = n^2 + 2n + 1 \leftrightarrow n^2 + 2n + 1 = 0$

$(n + 1)^2 = 0 \rightarrow n = -1$ ....(4)

Reemplazando (4) en (1): $ab - ac = 1$

Al dividir todo por "a" tenemos: $b - c = \frac{1}{a}$ ....(5)

Reemplazando (4) en (2): $bc - ab = -2$

Al dividir todo por "b" tenemos: $c - a = -\frac{2}{b}$ ....(6)

En (3) divido todo por "c": $a - b = \frac{1}{c}$ ....(7)

Finalmente en la expresión:

$$E=\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$$

$$E=b-c+c-a+a-b$$

$$\therefore \quad E=0$$

Clave: A

Ejercicio 38

Sea $a>0$. Si se sumple que:

$$\frac{a^4+a^{-4}-5}{a^2+a^{-2}}=6$$

Calcular $a+a^{-1}$

A) 2 B) 3 C) 7

D) 12 E) 18

Resolución:

La condición dada es:

$$a^4+a^{-4}-5=6(a^2+a^{-2})$$

Reescribiendo así:

$$\underbrace{a^4+a^{-4}+2}-7=6(a^2+a^{-2})$$

$$(a^2+a^{-2})^2-7=6(a^2+a^{-2})$$

Igualando a cero:

$$(a^2+a^{-2})^2-6(a^2+a^{-2})-7=0$$

Por la eq de Steven:

$$(a^2+a^{-2}-7)(a^2+a^{-2}+1)=0$$

Como $a>0$, se cumple:

$$a^2+a^{-2}-7=0 \leftrightarrow a^2+a^{-2}=7$$

Sumando 2 tenemos:

$$\underbrace{a^2+a^{-2}+2}=7+2$$

$$(a+a^{-1})^2=9$$

$$\therefore \quad a+a^{-1}=3$$

Clave B

Ejercicio 39

Determine el valor de

$$T=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Siendo $a\neq b\neq c$

A) -3 B) 1 C) 2

D) 3 E) 4

Resolución:

Fácilmente notamos que:

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$$

Por igualdad condicional tenemos:

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$$

Finalmente se tendrá:

$$T=\frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$T=\frac{-3(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$\therefore \quad T=-3$$

Clave A

Ejercicio 40

Si: $a^2+b^2+c^2=2$

$(a+b+c)(1+ab+ac+bc)=32$

Determine: $a+b+c$



A) 2 B) $\sqrt[3]{32}$ C) 4 D) 16 E) 64

Resolución:

A partir de la condición: $(a+b+c)(1+ab+ac+bc)=32$

Multiplicando por 2 tenemos: $(a+b+c)(2+2ab+2ac+2bc)=64$

Como $2=a^2+b^2+c^2$, tenemos: $(a+b+c)\underbrace{(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)}_{\text{Trinomio al cuadrado}}=64$

$$(a+b+c)(a+b+c)^2=64$$
$$(a+b+c)^3=64$$
$$\therefore \quad a+b+c=4$$

Clave: C

Ejercicio 41

Reducir: $E=(a+b)^2(b+c-a)(a+c-b)+(a-b)^2(a+b+c)(a+b-c)$

A) $-5abc^3$ B) $-2ab$ C) abc D) $2abc^4$ E) $4abc^2$

Resolución:

La expresión propuesta se puede reescribir de la manera siguiente:

$$E=(a+b)^2[c-(a-b)][c+(a-b)]+(a-b)^2[(a+b)+c][(a+b)-c]$$
$$E=(a+b)^2[c^2-(a-b)^2]+(a-b)^2[(a+b)^2-c^2]$$
$$E=(a+b)^2c^2-(a+b)^2(a-b)^2+(a-b)^2(a+b)^2-(a-b)^2c^2$$

Reduciendo términos:

$$E=(a+b)^2c^2-(a-b)^2c^2=[\underbrace{(a+b)^2-(a-b)^2}_{\text{Legendre}}]\,c^2$$
$$\therefore \quad E=4abc^2$$

Clave: E

Ejercicio 42

Sea: $P_n(x\,;y\,;z)\equiv x^n+y^n+z^n$

Si: $P_1(x\,;y;z)=3,\quad P_2(x\,;y;z)=\dfrac{3}{2},\quad P_3(x;y;z)=9$

Calcular el valor de:

$$E=3P_1(xy\,;yz\,;xz)-P_1(x\,;0\,;0)\,.\,P_1(0\,;y\,;0)\,.\,P_1(0\,;0\,;z)$$

A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:

De acuerdo con la condición y los datos tenemos:

$$x+y+z=3\,;\,x^2+y^2+z^2=\frac{3}{2}\quad\wedge\quad x^3+y^3+z^3=9$$

La expresión solicitada es: $E=3(xy+yz+xz)-xyz$

Recordemos la equivalencia:

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz$$

Reemplazando datos: $(3)^3=9+3(3)(xy+xz+yz)-3xyz$

Simplificando factor 3: $(3)^2=3+(3)(xy+xz+yz)-xyz$

Finalmente tenemos: $9=3+E$

$\therefore\quad E=6$

Clave: D

Ejercicio 43

Si: $a+b+c=0$

$abc=2$

$a^6+b^6+c^6=20$

Calcular: $F=\dfrac{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3}{a^3+b^3+c^3}$

A) 1/3 B) 4/3 C) 5/3 D) 2 E) 7/3

Resolución:

Como $a+b+c=0$, se cumple: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Pero $abc=2$, luego tenemos: $a^3+b^3+c^3=6$

Elevando al cuadrado se tendrá: $(a^3+b^3+c^3)^2=(6)^2$

$$\underbrace{a^6+b^6+c^6}+2(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)=36$$

$$20+2(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)=36$$

$$2(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)=16$$

$$a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3=8$$

Finalmente tenemos: $F=8/6$

$\therefore\quad F=4/3$

Clave: B



Ejercicio 44

Si: $y^2 = (1 - x)(x + y)$

Determine: $E = \dfrac{x^2 + y^3}{x^3 + y^2}$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

Por condición tenemos:

$$y^2 = (1 - x)(x + y)$$
$$y^2 = x + y - x^2 - xy$$
$$x^2 + xy + y^2 = x + y$$

Multiplicando por $(x - y)$:

$$(x - y).(x^2 + xy + y^2) = (x - y)(x + y)$$

Por equivalencias tenemos:

$$x^3 - y^3 = x^2 - y^2$$

Reescribiendo de esta forma:

$$x^3 + y^2 = x^2 + y^3$$

Finalmente tenemos:

$$E = \frac{x^2 + y^3}{x^2 + y^3}$$

$$\therefore \quad E = 1$$

Clave: B

Ejercicio 45

Si: $x^2 - 3x + 1 = 0$

Calcular: $E = x^6 + \dfrac{1}{x^6}$

A) 322 B) 320 C) 325
D) 327 E) 328

Resolución:

Por condición tenemos:

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$x^2 + 1 = 3x$$

Al dividir todo por "x" tenemos:

$$\frac{x^2 + 1}{x} = \frac{3x}{x} \quad \Rightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 3$$

Elevando al cubo según la equivalencia de Cauchy:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = (3)^3$$

$$x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(1)(3) = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 9 = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Elevando al cuadrado tenemos:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = (18)^2$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} + 2\left(x^3 \cdot \frac{1}{x^3}\right) = 324$$

Finalmente hemos obtenido:

$$E + 2(1) = 324$$
$$E + 2 = 324$$
$$\therefore \quad E = 322$$

Clave: A

Ejercicio 46

Si: $(x+y+z+w)^2+(x+y-z-w)^2=4(x+y)(z+w)$

Calcular: $T=\left[\left(\dfrac{x-z}{w-y}\right)^2+\left(\dfrac{x-w}{z-y}\right)^2\right]^3$

A) 0 B) 1 C) 4 D) 8 E) 27

Resolución:

Reescribiendo la condición dada de la manera siguiente:

$$\underbrace{[(x+y)+(z+w)]^2+[(x+y)-(z+w)]^2}_{\text{Legendre}}=4(x+y)(z+w)$$

$$2[(x+y)^2+(z+w)^2]=4(x+y)(z+w)$$

Simplificando: $(x+y)^2+(z+w)^2=2(x+y)(z+w)$

Igualando a cero: $(x+y)^2+(z+w)^2-2(x+y)(z+w)=0$

$$[(x+y)-(z+w)]^2=0$$

De donde es necesario: $(x+y)-(z+w)=0$

$$x+y=z+w$$

Reescribiendo la igualdad: $x-w=z-y$ ....(1)

$x-z=w-y$ ....(2)

Finalmente (1) y (2) en T: $T=[(1)^2+(1)^2]^3$

$$T=[1+1]^3=[2]^3$$

$$\therefore \quad T=8$$

Clave: D

Ejercicio 47

Si: $\dfrac{a+b+1}{a-1}+\dfrac{a+b+1}{b+2}=4$; $a\neq 1$; $b\neq -2$

Calcular:

$$E=\frac{54}{a^3-b^3-3ab(a-b)}+\frac{a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4}{27}$$



A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 12

Resolución:

La expresión pedida es:

$$E=\frac{54}{(a-b)^3}+\frac{(a-b)^4}{27} \qquad ...(1)$$

Por condición tenemos:

$$\frac{a+b+1}{a-1}+\frac{a+b+1}{b+2}=4$$

Reescribiendo la igualdad:

$$\frac{(a-1)+(b+2)}{a-1}+\frac{(a-1)+(b+2)}{b+2}=4$$

$$1+\frac{b+2}{a-1}+\frac{a-1}{b+2}+1=4$$

$$\frac{b+2}{a-1}+\frac{a-1}{b+2}=2$$

Recordemos la propiedad:

$$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=2 \quad \rightarrow \quad m=n$$

Ahora en nuestro ejercicio:

$$b+2=a-1$$

De donde en verdad tenemos:

$$a-b=3$$

Finalmente en (1) tenemos:

$$E=\frac{54}{27}+\frac{81}{27}$$

$$E=2+3$$

$$\therefore \quad E=5$$

Clave: A

Ejercicio 48

Si: $a, b \in \mathbf{R}-\{0\}$ tal que $a+b\neq 0$, además:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b}-\frac{1}{b}$$

Entonces el valor de:

$$T=\frac{a^3+b^2a+3a^2b}{ab^2+3a^2b+b^3}$$

es:

A) –1 B) 1 C) 2
D) 3 E) 5

Resolución:

Por condición tenemos:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}=\frac{3}{a+b}-\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{4}{a+b}$$

Efectuando conseguimos: $a=b$

Finalmente se tendrá:

$$T=\frac{a^3+a^3+3a^3}{a^3+3a^3+a^3}=\frac{5a^3}{5a^3}$$

$$\therefore \quad T=1$$

Clave: B

Ejercicio 49

Si: $x+y=\sqrt{10}$

$$(x-z)^2+(z+y)^2=6$$

Calcular: $M=xz+xy-yz-z^2$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 8

Resolución:

Se pide calcular: $M = xz + xy - yz - z^2$

Multiplicando por 2: $2M = 2xz + 2xy - 2yz - 2z^2$

Completando cuadrados:

$$2M = x^2 - x^2 + y^2 - y^2 + 2xz + 2xy - 2yz - 2z^2$$

$$2M = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xz - z^2 - z^2 - 2yz - y^2$$

$$2M = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xz + z^2) - (z^2 + 2yz + y^2)$$

$$2M = (x + y)^2 - (x - z)^2 - (z + y)^2$$

$$2M = (x + y)^2 - [(x - z)^2 + (z + y)^2]$$

Reemplazando datos:

$$2M = (\sqrt{10})^2 - [6]$$

$$2M = 10 - 6 = 4$$

$$\therefore \quad M = 2$$

Clave B

Ejercicio 50

Si se cumple: $x + 4y + 9z = 0$. Simplificar:

$$E = \frac{(x-2y)^2}{xy} + \frac{(2y-3z)^2}{yz} + \frac{(3z-x)^2}{xz}$$

A) –42 B) –36 C) –22 D) –12 E) –8

Resolución:

Desarrollando cada numerador de la expresión propuesta conseguimos:

$$E = \frac{x^2 + 4y^2 - 4xy}{xy} + \frac{4y^2 + 9z^2 - 12yz}{yz} + \frac{9z^2 + x^2 - 6xz}{xz}$$

Separando fracciones en cada uno de los términos tenemos:



$$E=\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}-4+\frac{4y}{z}+\frac{9z}{y}-12+\frac{9z}{x}+\frac{x}{z}-6$$

$$E=\frac{x}{y}+\frac{9z}{y}+\frac{4y}{x}+\frac{9z}{x}+\frac{4y}{z}+\frac{x}{z}-22$$

$$E=\frac{x+9z}{y}+\frac{4y+9z}{x}+\frac{4y+x}{z}-22$$

Por condición: $x+4y+9z=0$ →
$x+9z=-4y$
$4y+9z=-x$
$4y+x=-9z$

Finalmente tenemos: $E=\frac{-4y}{y}+\frac{-x}{x}+\frac{-9z}{z}-22$

$$E=-4-1-9-22$$

$$\therefore \quad E=-36$$

Clave: B



PROBLEMAS RESUELTOS



PROBLEMA 1

Simplificar:

$$K = \frac{(100)^3 \cdot (21)^4 \cdot (27)^2}{2 \cdot (6)^5 \cdot (15)^2 \cdot (35)^4}$$

Resolución:

Expresando cada base en función de números primos:

$$K = \frac{(5^2 \cdot 2^2)^3 \cdot (7 \cdot 3)^4 \cdot (3^3)^2}{2 \cdot (3 \cdot 2)^5 \cdot (5 \cdot 3)^2 \cdot (7 \cdot 5)^4}$$

Dando uso de los teoremas:

$$K = \frac{5^6 \cdot 2^6 \cdot 7^4 \cdot 3^4 \cdot 3^6}{2 \cdot 3^5 \cdot 2^5 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 7^4 \cdot 5^4}$$

$$K = \frac{5^6 \cdot 2^6 \cdot 7^4 \cdot 3^{10}}{2^6 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^4} = \frac{3^{10}}{3^7}$$

$$K = 3^{10-7} = 3^3$$

$$\therefore \boxed{K = 27}$$

PROBLEMA 2

Si $x^x = 2$. Calcular:

$$E = \sqrt[2^{x^x}]{x}^{\,x^{4x^{1-3x+x^{x+1}}+1}}$$

Resolución:

En la expresión propuesta tenemos:



$$E = \sqrt[2^{x^x}]{x}^{\,x^{4x^{1-3x+x^x\cdot x}+1}}$$

Reemplazando convenientemente x^x por 2:

$$E = \sqrt[2^2]{x}^{\,x^{4x^{1-3x+2x}+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{4x^{1-x}+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{4x\cdot x^{-x}+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{4x\cdot (x^x)^{-1}+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{4x\cdot (2)^{-1}+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{\frac{4x}{2}+1}} = \sqrt[4]{x}^{\,x^{2x+1}}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,x^{2x}\cdot x} = \sqrt[4]{x}^{\,(x^x)^2\cdot x}$$

$$E = \sqrt[4]{x}^{\,(2)^2\cdot x} = \sqrt[4]{x}^{\,4x} = x^x$$

$$\therefore \boxed{E = 2}$$

PROBLEMA 3

Determine el valor de ***x*** en:

$$\sqrt[m]{\frac{x^m + 5^m}{80 + x^m}} = \frac{1}{4} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución:

Elevando a cada miembro de la ecuación al exponente **m**, tenemos:



$$\frac{x^m + 5^m}{80^m + x^m} = \frac{1}{4^m}$$

$$4^m \cdot x^m + 4^m \cdot 5^m = 80^m + x^m$$

$$(4x)^m + 20^m = 80^m + x^m$$

$$(4x)^m - x^m = 80^m - 20^m$$

$$(4^m - 1) \cdot x^m = (4^m - 1) \cdot 20^m$$

Como $m \in \mathbb{Z}^+$, $4^m - 1 \neq 0$:

$$x^m = 20^m$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 20}$$

PROBLEMA 4

Sabiendo que:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} = 4$$

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[a+b]{2^{a-b}} \quad \sqrt[b+c]{2^{b-c}}}{\sqrt[a+c]{2^{a-c}}}$$

Resolución:

Sea "K" la expresión que se pide simplificar, luego tenemos:

$$K = \frac{2^{\frac{a-b}{a+b}} \cdot 2^{\frac{b-c}{b+c}}}{2^{\frac{a-x}{a+c}}}$$

$$K = 2^{\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} - \frac{a-c}{a+c}} \qquad \text{---------------}(1)$$

Multiplicando por 2 cada miembro de la condición:

$$\frac{2a}{a+b} + \frac{2b}{b+c} + \frac{2c}{a+c} = 8$$

Restando 3 a cada miembro en forma conveniente:



$$\frac{2a}{a+b}-1+\frac{2b}{b+c}-1+\frac{2c}{a+c}-1=8-3$$

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{a+c}=5$$

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}-\frac{a-c}{a+c}=5 \qquad \text{----------- (2)}$$

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$K=2^5$$

$$\therefore \boxed{K=32}$$

PROBLEMA 5

Sabiendo que:

$$p\left(\frac{1}{f(x)}\right)\equiv a^2x+3a+1 \qquad \text{............ (1)}$$

$$f(x)\equiv ax+1 \qquad \text{............ (2)}$$

Calcular el valor de $p\left(-\frac{1}{2}\right)$

Resolución:

Reemplazando (2) en (1) tenemos:

$$p\left(\frac{1}{ax+1}\right)\equiv a^2x+3a+1 \qquad \text{............ (3)}$$

Hagamos el siguiente cambio $u=\frac{1}{ax+1}$:

$$ax+1=\frac{1}{u} \quad \Leftrightarrow \quad ax=\frac{1}{u}-1$$

$$ax=\frac{1-u}{u}$$

Transformando en (3) tenemos:

$$p\left(\frac{1}{ax+1}\right)\equiv a(ax)+3a+1$$

$$p(u) \equiv a\left(\frac{1-u}{u}\right) + 3a + 1$$

Finalmente reemplazando u por $-\frac{1}{2}$:

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = a\left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + 3a + 1$$

$$p\left(-\frac{1}{2}\right) = -3a + 3a + 1$$

$$\therefore \quad \boxed{p\left(-\frac{1}{2}\right) = 1}$$

PROBLEMA 6

Si : $F(x) = \frac{2x+1}{x}$. Calcular: $S = F(1) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F=\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + F\left(\frac{1}{20}\right)$

Resolución:

Por condición tenemos que:

$$F(x) = \frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$$

Al reemplazar cada valor numérico en "S" tenemos:

$$S = (2+1) + (2+2) + (2+3) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2+20)$$
$$S = 2 + 2 + 2 + \ldots\ldots\ldots + 2 + (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 20)$$

$$S = (2)\cdot 20 + \frac{20\cdot 21}{2} = 40 + 210$$

$$\therefore \quad \boxed{S = 250}$$

PROBLEMA 7

Si el polinomio:

$$P(x) \equiv (a + b - 6abc)x^2 + (a + c - 3abc)x + (b + c - 7abc)$$



Se anula para más de 2 valores de x. Determine el valor de la siguiente expresión:

$$E=\left(\frac{abc}{a+b+c}\right)^{-3}$$

Resolución:

De acuerdo con la teoría estamos frente a un polinomio identicamente nulo, razón por la cual se plantea:

$$a+b-6abc=0 \;\wedge\; a+c-3abc=0 \;\wedge\; b+c-7abc=0$$

$$a+b=6abc \wedge\; a+c=3abc \;\wedge\; b+c=7abc$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones:

$$(a+b)+(a+c)+(b+c)=6abc+3abc+7abc$$

$$2(a+b+c)=16abc$$

$$a+b+c=8abc$$

Finalmente en la expresión solicitada:

$$E=\left(\frac{abc}{8abc}\right)^{-3}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}=8^3$$

$$\therefore\; \boxed{E=512}$$

PROBLEMA 8

¿Cuántos polinomios P(x) en $\mathbb{R}$ existen, tales que para todo valor real de x se cumple:

$$P(x)\cdot P(-x)=-x^2?$$

Resolución:

Como la igualdad propuesta se verifica para todo valor real de x, estamos frente a una identidad:

$$P(x)\cdot P(-x)\equiv -x^2 \qquad \text{.............}(1)$$

Supongamos que el grado de P(x) es "n", entonces el grado de P(–x) también será "n". Ahora en (1) según teoría de grados tenemos:

$$n+n=2$$

$$2n=2$$

$$n=1$$

Sea $P(x)\equiv ax+b$, luego en (1) tenemos:

$$(ax+b)(-ax+b)\equiv -x^2$$

$$-a^2x^2+b^2-abx+abx\equiv -x^2$$

$$-b^2x^2+b^2\equiv -x^2$$

De donde se cumple que:

$$-a^2 = -1 \wedge b^2 = 0$$
$$-a^2 = 1 \wedge b = 0$$

Al resolver obtenemos:

$$(a = 1 \wedge b = 0) \vee (a = -1 \wedge b = 0)$$

Con lo cual los polinomios son:

$$P(x) \equiv x \;\vee\; P(x) = -x$$

$\therefore$ Existen 2 polinomios que verifican la condición

PROBLEMA 9

Si: $F(x) \equiv ax^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Calcular: $\dfrac{8b^2}{ac}$

Resolución:

Como F(x) es un trinomio cuadrado perfecto se cumple que: $b^2 = 4ac$

Finalmente tenemos:

$$E = \frac{8b^2}{ac} = \frac{8(4ac)}{ac} = 8 \cdot 4$$

$$\therefore \quad E = 32$$

PROBLEMA 10

Si $y = x - 1$. Calcular el valor de la expresión:

$$\frac{(x^3 - y^3)^4 + \sqrt[4]{4}}{(1+3xy)^4 + \sqrt{2}} \;;\; x,\, y \in \mathbb{R}$$

Resolución:

Por condición tenemos:

$$y = x - 1$$
$$x - 1 = y$$
$$x - y = 1$$

Elevando al cubo según la equivalencia de Cauchy:

$$x^3 - y^3 - 3(x\,y)(x - y) = 1$$
$$x^3 - y^3 - 3(x\,y)(1) = 1$$
$$x^3 - y^3 - 3xy = 1$$
$$x^3 - y^3 = 1 + 3xy$$

Considerando que $\sqrt[4]{4} <> \sqrt{2}$ y suponiendo que "K" es la expresión a simplificar tenemos:

$$K = \frac{(1+3xy)^4 + \sqrt{2}}{(1+3xy)^4 + \sqrt{2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{K = 1}$$

PROBLEMA 11

Calcular x en: $$4^{\sqrt{2}^{x+1}} = 2^{4^{x-1}}$$

Resolución:

Expresando en función de la base 2:

$$(2^2)^{\sqrt{2}^{x+1}} = 2^{4^{x-1}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{2\sqrt{2}^{x+1}} = 2^{4^{x-1}}$$

Por teorema tenemos:

$$2\sqrt{2}^{x+1} = 4^{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2.2^{\frac{x+1}{2}} = (2^2)^{x-1}$$

$$2^{1+\frac{x+1}{2}} = 2^{2x-2}$$

Nuevamente el teorema:

$$1 + \frac{x+1}{2} = 2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + x + 1 = 4x - 4$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 7/3}$$

PROBLEMA 12

Simplificar. $$E = \frac{7^{x+1} + 7^{x+2} + 7^{x+3}}{7^{x+2} - 7^{x+1}} \; ; x \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$$

Resolución:

Extrayendo la potencia con menor exponente en cada uno de los términos, tenemos:

$$E = \frac{7^{x+1}.(1 + 7^1 + 7^2)}{7^{x+1}.(7^1 - 1)}$$

$$E=\frac{1+7+49}{7-1}=\frac{57}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{E=\frac{19}{2}}$$

PROBLEMA 13

Determine el término independiente de x en el siguiente polinomio mónico lineal:

$$P(x)\equiv(a-2)x^2+(a-b-3)x+ab+1$$

Resolución:

Como $P(x)$ es lineal se cumple que: $a-2=0 \quad \leftrightarrow \quad a=2$

Ahora $P(x)$ queda reducido a: $P(x)\equiv(a-b-3)x+ab+1$

$$P(x)\equiv(-1-b)x+2b+1$$

Como $P(x)$ es mónico se cumple que: $-1-b=1 \leftrightarrow -2=b$

Finalmente el polinomio mónico lineal es:

$$P(x)\equiv x-4+1$$

$$P(x)\equiv x-3$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{TI de } x \text{ en } P(x)=-3}$$

PROBLEMA 14

Si: $A=(a+b)(a+c)(b-c)+(c-a)(a+b)(b+c)$

$B=(a-b)(b+c)(a+c)+(b-c)(c-a)(a-b)$

Calcular : "A + B"

Resolución:

Para: $A=(a+b)[(a+c)(b-c)+(c-a)(b+c)]$

$$A=(a+b)[ab+bc-ac-c^2+c^2-ac+bc-ab]$$

$$A=(a+b)(2bc-2ac)$$

$$A=2c(a+b)(b-a)$$

Para: $B=(a-b)[(b+c)(a+c)+(b-c)(c-a)]$

$$B=(a-b)[ab+ac+bc+c^2+bc-c^2-ab+ac]$$

E&M

$$B = (a - b)[2ac + 2bc]$$
$$B = -2c(b - a)(a + b)$$

Luego: $A + B = 0$

PROBLEMA 15

Simplificar:
$$K = \left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{(ab)^{-1}} x^{(bc)^{-1}} x^{(ac)^{-1}}}}{\sqrt[a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}]{x^{ab} x^{bc} x^{ac}}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes en el corchete.

$$K = \left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}}}{\sqrt[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}]{x^{ab+bc+ac}}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}} \rightarrow K = \left[\frac{\sqrt[a+b+c]{x^{\frac{a+b+c}{abc}}}}{\sqrt[\frac{ab+bc+ac}{abc}]{x^{ab+bc+ac}}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Efectuando operaciones de cancelación:

$$K = \left[\frac{x^{\frac{1}{abc}}}{x^{abc}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}} = \left[x^{\frac{1-(abc)^2}{abc}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Recordar: $M^2 - N^2 = (M + N)(M - N)$

$$K = \left[x^{\frac{(1-abc)(1+abc)}{abc}} \right]^{\frac{abc}{1-abc}}$$

Luego: $K = x^{1 + abc}$

PROBLEMA 16

Reducir la siguiente expresión:

$$E=\left[\sqrt[n]{\sqrt[n^{\sqrt[n]{n}}]{\sqrt[n]{n^{\sqrt[n]{n}}}}}\right]^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{n+1}}+n-1}$$

Resolución:

Recordar: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{A}}}=\sqrt[m.n.p]{A}$

$$E=\left[\sqrt[n\,.\,n^{\sqrt[n]{n}}.n]{n^{\sqrt[n]{n}}}\right]^{\sqrt[n]{n}^{\sqrt[n]{n}^{n}\sqrt[n]{n}+n-1}}$$

Efectuando:

$$E=\left[\sqrt[n\,.\,n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}^{n\sqrt[n]{n}+n-1}} \rightarrow E=\left[\sqrt[n\,.\,n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{\sqrt[n]{n}^{n(\sqrt[n]{n}+1)}}$$

$$E=\left[\sqrt[n\,.\,n^{\sqrt[n]{n}+1}]{n}\right]^{n^{\sqrt[n]{n}+1}}$$

Luego: $E=\sqrt[n]{n}$

PROBLEMA 17

Proporcionar el valor más simple de:

$$K=\sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{(x^{n})^{(n+1)^{2}}+x^{(n+1)^{3}}}{\left[x^{\frac{(n+1)^{2}}{2}}\right]^{n}+x^{\frac{(n+1)^{2}(n+2)}{2}}}}$$



Resolución:

Haciendo arreglos en el radicando.

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{\left[x^{(n+1)^2}\right]^n + \left[x^{(n+1)^2}\right]^{(n+1)}}{\left[x^{(n+1)^2}\right]^{\frac{n}{2}} + \left[x^{(n+1)^2}\right]^{\frac{(n+2)}{2}}}}$$

Hagamos: $x^{(n+1)^2} = b$; luego tenemos:

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{b^n + b^{n+1}}{b^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}+1}}} = \sqrt[\frac{n}{2}]{\frac{b^n(1+b)}{b^{\frac{n}{2}}(1+b)}}$$

$$K = \sqrt[\frac{n}{2}]{b^{n-\frac{n}{2}}} = \sqrt[\frac{n}{2}]{b^{\frac{n}{2}}} = b$$

Finalmente: $\boxed{K = x^{(n+1)^2}}$

PROBLEMA 18

Simplificar: $$M = \sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x}}}} \cdot \sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x}^3}}}$$

Resolución:

Se tiene: $$M = \sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x}}}} \cdot \sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[\sqrt[x]{x}]{\sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x}^3}}}}$$

$$M = \sqrt[\sqrt[x]{x}(1+\sqrt[x]{x})]{x^{2\sqrt[x]{x}}} \cdot \sqrt[\sqrt[x]{x}^2(1+\sqrt[x]{x})]{x^{2\sqrt[x]{x}^3}}$$

$$M = \sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^2} \cdot \sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2\sqrt[x]{x}}}$$

$$M = \sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^2 \cdot x^{2\sqrt[x]{x}}} = \sqrt[1+\sqrt[x]{x}]{x^{2(1+\sqrt[x]{x})}}$$

Finalmente: $\boxed{M = x^2}$

PROBLEMA 19

Simplificar:

$$E = \sqrt[2n]{\left[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}+1}\sqrt{\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}}}\right)^{\sqrt{x}}}}{\underbrace{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.......\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}_{(24n+1)\text{ radicales}}}\right]^{-1}} \quad ; n \in \mathbf{Z}^+$$

Resolución:

Efectuando en el radicando:

$$E = \sqrt[2n]{\left[\frac{\sqrt{x}^{\sqrt{x}+1}\sqrt{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}+1}}}}{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.......\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}\right]^{-1}}$$

Recordar:
$$A^{-m} = \left(\frac{1}{A}\right)^{m} = \frac{1}{A^{m}}$$

En el problema:
$$E = \sqrt[2n]{\frac{\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}\sqrt[3]{y}.......\sqrt{x}\sqrt[3]{y}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

Al efectuar la cancelación de $\sqrt{x}$ en el radicando quedarán 24n radicales; de los cuales 12n serán: $\sqrt{x}$ y 12n serán: $\sqrt[3]{y}$ por ser: 24n un número par.

Luego:
$$E = \sqrt[2n]{\overbrace{\sqrt{x}\sqrt{x}.......\sqrt{x}}^{12n\text{ radicales}}\cdot\overbrace{\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{y}........\sqrt[3]{y}}^{12n\text{ radicales}}}$$

$$E = \sqrt[2n]{\sqrt{x}^{12n}\cdot\sqrt[3]{y}^{12n}} = \sqrt[2n]{x^{6n}}\cdot\sqrt[2n]{y^{4n}}$$

Finalmente:
$$\boxed{E = x^3y^2}$$

E&M



PROBLEMA 20

A condición de que: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$

Reducir: $K=\sqrt[a]{\frac{\sqrt[a]{x^b}}{x}}^{\,b}+\sqrt[b]{\frac{\sqrt[b]{x^a}}{x}}^{\,a}$

Resolución:

Reduciendo en "K"

$$K=\sqrt[a]{\frac{\sqrt[a]{x^b}}{x}}^{\,b}+\sqrt[b]{\frac{\sqrt[b]{x^a}}{x}}^{\,a} \rightarrow K=\sqrt[a]{\sqrt[a]{x^{b-a}}}^{\,b}+\sqrt[b]{\sqrt[b]{x^{a-b}}}^{\,a}$$

$$K=\sqrt[a^2]{x^{b^2-ab}}+\sqrt[b^2]{x^{a^2-ab}} \rightarrow K=x^{\frac{b^2-ab}{a^2}}+x^{\frac{a^2-ab}{b^2}}$$

De la condición

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1 \rightarrow a^2+b^2=ab \begin{cases} b^2-ab=-a^2 \\ a^2-ab=-b^2 \end{cases}$$

$$K=x^{\frac{-a^2}{a^2}}+x^{\frac{-b^2}{b^2}}=x^{-1}+x^{-1}$$

Finalmente: $K=2x^{-1}$

PROBLEMA 21

Si: $x^{x^x}=2.$ Proporcionar el valor de: $E=\sqrt[x^{nx}]{x^{x^{(n+1)x}+x^{(n+1)x+x^x}}}$

Resolución:

Efectuando en el radicando: $E=\sqrt[x^{nx}]{x^{x^{nx+x}+x^{nx+x+x^x}}}$

Desdoblando como un producto de bases iguales:

$$E = \sqrt[x^{nx}]{x^{x^{nx+x}} \cdot x^{x^{nx+x+x^x}}}$$

Transformando cada factor del radicando para hacer uso del dato.

$$E = \sqrt[x^{nx}]{\left(x^{x^{nx}}\right)^{x^x} \cdot \left[\left(x^{x^{nx}}\right)^{x^x}\right]^{x^{x^x}}}$$

Recordar: $(A^m)^n = (A^n)^m$

$$E = \sqrt[x^{nx}]{\left(x^{x^x}\right)^{x^{nx}} \cdot \left[\left(x^{x^x}\right)^{x^{nx}}\right]^{x^{x^x}}}$$

Utilizando el dato: $E = \sqrt[x^{nx}]{2^{x^{nx}} \cdot \left[2^{x^{nx}}\right]^2} = \sqrt[x^{nx}]{2^{3x^{nx}}}$

Finalmente: $E = 8$

PROBLEMA 22

Si: $\sqrt[m]{m^{3m+2}} = 5$. Proporcionar el valor de: $E = \sqrt[(\sqrt[m]{m^{-2}})^{m+1}]{m\left(\sqrt[5]{m^3}\right)^{m-1}}$

Resolución:

Simplificando "E": $E = \sqrt[\sqrt[m]{m}^{-2(m+1)}]{m \cdot \sqrt[5]{m^{3m-3}}}$

$$E = \sqrt[\sqrt[m]{m}^{-2(m+1)}]{\sqrt[5]{m^{3m-3} \cdot m^5}}$$

$$E = \sqrt[5\sqrt[m]{m}^{-2(m+1)}]{m^{3m+2}}$$

Transformando para utilizar el dato: $E = \sqrt[5\sqrt[m]{m}^{-2(m+1)}]{\sqrt[m]{m^{3m+2}}^{\,m}}$



Reemplazando el dato tanto en el indice como en el radicando:

$$E = \sqrt[\sqrt[m]{m}^{3m+2}\cdot\sqrt[m]{m}^{-2(m+1)}]{5^m}$$

$$E = \sqrt[\sqrt[m]{m}^{m}]{5^m} = E = \sqrt[m]{5^m}$$

Luego: $E = 5$

PROBLEMA 23

Sabiendo que: $x = \sqrt[7]{7}^{\sqrt[7]{7}^{-1}}$. Simplificar: $M = [x^7]^{x^{\sqrt[7]{7}}} + x^{7x^{\sqrt[7]{7}}} + \left[x^{x^{\sqrt[7]{7}}}\right]^7$

Resolución:

Del dato: $x = \sqrt[7]{7}^{\sqrt[7]{7}^{-1}}$

Elevamos al exponente $\sqrt[7]{7}$: $(x)^{\sqrt[7]{7}} = \left[\sqrt[7]{7}^{\sqrt[7]{7}^{-1}}\right]^{\sqrt[7]{7}}$

Luego tenemos: $x^{\sqrt[7]{7}} = \sqrt[7]{7}$ ....(I)

Transformando "M": $M = \left[x^{x^{\sqrt[7]{7}}}\right]^7 + \left[x^{x^{\sqrt[7]{7}}}\right]^7 + \left[x^{x^{\sqrt[7]{7}}}\right]^7$

$$M = 3\left[x^{x^{\sqrt[7]{7}}}\right]^7$$

Utilizando (I) $M = 3\left[x^{\sqrt[7]{7}}\right]^7 = 3\left[\sqrt[7]{7}\right]^7$

Finalmente: $M = 21$

PROBLEMA 24

Siendo: $xy = 1 + x + y$

Proporcionar el valor numérico de: $K = \left[\sqrt[1-x]{\sqrt[1-y]{2\left(\dfrac{xy-1}{x+y}\right)}}\right]^{(1+x^{-1})(1+y^{-1})}$

Resolución:

En "K" apliquemos leyes de exponentes:

$$K = \left[\sqrt[1-x-y+xy]{2\left(\frac{xy-1}{x+y}\right)}\right]^{\frac{1+x+y+xy}{xy}}$$

Del dato: $xy = 1 + x + y$

También: $xy - 1 = x + y$

Reemplazando en "K": $K = \left[\sqrt[1-x-y+1+x+y]{2\left(\dfrac{x+y}{x+y}\right)}\right]^{\frac{xy+xy}{xy}}$

$$K = \left[\sqrt{2}\right]^2$$

Luego: $\boxed{K = 2}$

PROBLEMA 25

Proporcionar el valor más simple de:

$$R = \frac{\left[\sqrt[y]{(x(x^2(x^3 \text{.......k veces......})^y)^y)^y}\right]^{(1-y)^2}}{x^{1-(k+1)y^k}}$$

Resolución:

Sea el radicando: x^E

Luego: $$R = \frac{\sqrt[y]{x^{E}}^{(1-y)^2}}{x^{1-(k+1)y^k}} = x^{\frac{E(1-y)^2}{y}+(k+1)y^k-1} \quad ......(I)$$

Cálculo de "E":

$$E = y + 2y^2 + 3y^3 + 4y^4 + ... + ky^k$$

Multiplicando por "y"

$$yE = y^2 + 2y^3 + 3y^4 + 4y^5 + ... + ky^{k+1}$$

Restando m.a.m:

$$(1-y)E = y + y^2 + y^3 + y^4 + ... + y^k - ky^{k+1}$$

$$(1-y)E = y(1 + y + y^2 + y^3 + ... + y^{k-1}) - ky^{k+1}$$

Recordar:

$$1 + A + A^2 + A^3 + ... + A^n = \frac{A^{n+1}-1}{A-1}$$

En el problema: $$(1-y)E = \frac{y(y^k-1)}{y-1} - ky^{k+1}$$

Multiplico por: (1 - y) $$(1-y)^2E = -y(y^k-1) - (1-y)ky^{k+1}$$

Divido por: "y" $$\frac{(1-y)^2E}{y} = -(y^k-1) - (1-y)ky^k$$

Reduciendo: $$\frac{(1-y)^2E}{y} = -y^k + 1 - ky^k + ky^{k+1}$$

$$\frac{(1-y)^2E}{y} = ky^{k+1} + 1 - y^k(k+1) \quad ....(II)$$

Luego: (II) → (I) $$R = x^{ky^{k+1}+1-y^k(k+1)+(k+1)y^k-1}$$

Finalmente: $$\boxed{R = x^{ky^{k+1}}}$$

PROBLEMA 26

Reducir:

$$K = \sqrt[1]{\frac{\sqrt[2]{\frac{\sqrt[3]{\frac{\cdot^{\cdot^{\cdot}} \text{ n radicales}}{x^{3!}}}}{x^{2!}}}}{x^{1!}}}$$

Resolución:

Recordar: $\lfloor\,\, = ! =$ símbolo factorial

$n! = 1.\,2.\,3.\,4.......(n-1)\,.\,n \qquad \forall n \in \mathbf{N}/n \geq 2$

Por definición: $\begin{cases} 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$

En el problema, llevando a una forma lineal

$$K = \frac{1}{\sqrt[1]{x^{1!}\sqrt[2]{x^{2!}\sqrt[3]{x^{3!}.....................\sqrt[n]{x^{n!}}}}}} = \frac{1}{x^{E}}$$

Cálculo de "E":

$1 \rightarrow$ Rad: $\sqrt[1]{x^{1!}} = x^{\frac{1!}{1}} = x$

$2 \rightarrow$ Rad: $\sqrt[1]{\sqrt[2]{x^{2!}}} = x^{\frac{2!}{1\cdot 2}} = x$

$3 \rightarrow$ Rad: $\sqrt[1]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{x^{3!}}}} = x^{\frac{3!}{1.2.3}} = x$

$\vdots$

$n \rightarrow$ Rad: $\sqrt[1]{\sqrt[2]{\sqrt[3]{......\sqrt[n]{x^{n!}}}}} = x^{\frac{n!}{1.2.3.......n}} = x$

Luego: $x^{E} = \underbrace{x\,.\,x\,.\,x.........x}_{\textbf{n} \text{ factores}}$

$x^{E} = x^{n}$

Finalmente: $\boxed{K = x^{-n}}$

PROBLEMA 27

Reducir: $$T = \left[\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[5]{\dfrac{\cdot^{\cdot^{\infty}}}{x^{14}}}}{x^{11}}}}{x^{8}}}}{x^{5}}}\right]^{-4^{4^{2^{-1}}}}$$

Resolución:

Sea: $$T = A^M \qquad ....(I)$$

Hallemos: "A" $$A = \frac{1}{\sqrt[5]{x^5\sqrt[5]{x^8\sqrt[5]{x^{11}\sqrt[5]{x^{14}........\infty}}}}} = \frac{1}{x^E}$$

Para E: $$E = \frac{5}{5} + \frac{8}{5^2} + \frac{11}{5^3} + \frac{14}{5^4} + \frac{17}{5^5} + ... \infty$$

Multiplicando a.a.m por 5. $$5E = 5 + \frac{8}{5} + \frac{11}{5^2} + \frac{14}{5^3} + \frac{17}{5^4} + \frac{20}{5^5} + ... \infty$$

Restando: m.a.m $$4E = 5 + \frac{3}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \frac{3}{5^5} + ... \infty$$

$$4E = 5 + \frac{3}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + ... \infty\right)$$

Recordar: $$\int = 1 + x + x^2 + x^3 + ...\infty$$

Suma límite = $\int$lím

$$\int \text{Lím} = 1 + x + x^2 + ...\infty = \frac{1}{1-x} \quad ; \quad |x| < 1$$

En el problema: $$4E = 5 + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{1-1/5}\right) \quad \Rightarrow \quad E = 23/16$$

Luego : $A = x^{-23/16}$ ....(II)

Hallemos "M" $M = -4^{4^{2^{-1}}} = -4^{4^{1/2}} = -4^2$

$M = -16$ ....(III)

Finalmente con (II) y (III) en (I) :

$$T = \left[x^{-\frac{23}{16}}\right]^{-16} \Rightarrow T = x^{-\frac{23(-16)}{16}}$$

$$\therefore \quad \boxed{T = x^{23}}$$

PROBLEMA 28

Reducir: $M = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\dfrac{\sqrt{\dfrac{\cdot^{\cdot^{\cdot \infty}}}{x^{-10}}}}{x^{-7}}}}{x^{-5}}}$

Resolución:

Llevando a una forma lineal: $M = \sqrt{x^5\sqrt{x^7\sqrt{x^{10}\sqrt{x^{14}.............\infty}}}} = x^E$

En el exponente: $E = \frac{5}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \frac{19}{2^5} + ... \infty$

Observar que para este tipo de problemas el método consiste en multiplicar a ambos miembros por el menor denominador para luego restar miembro a miembro fracciones homogéneas.

Realizar esta operación hasta que los numeradores de cada fracción sean iguales:

En el problema:

$$E = \frac{5}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \frac{14}{2^4} + \frac{19}{2^5} + ... \infty$$



Por : "2" $$2E=5+\frac{7}{2}+\frac{10}{2^2}+\frac{14}{2^3}+\frac{19}{2^4}+............\infty$$

Restando: $$E=5+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+............\infty$$

Por "2": $$2E=10+2+\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{6}{2^4}+.......\infty$$

Restando: $$E=7+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+............\infty$$

$$E=7+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...........\infty\right.$$

$$E=7+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right)=8$$

Finalmente: $M=x^8$

PROBLEMA 29

Calcular el valor de "x" en: $$\frac{3^{2x+2}+3^{2x-1}}{3^{x-2}+3^{x+1}}=729$$

Resolución:

Reduciendo en el primer miembro: $$\frac{3^{2x}(3^2+3^{-1})}{3^x(3^{-2}+3)}=729$$

Aplicando leyes de exponentes: $$3^x\,.\,3=3^6$$
$$3^{x+1}=3^6$$

Recordar: $a^x=a^y \quad \Rightarrow \; x=y \; ; \; a>0 \; \wedge \; a\neq 1$

Teorema principal para la resolución de una ecuación exponencial.

En nuestro problema: $x+1=6$

Luego: $x=5$

PROBLEMA 30

Hállese un valor de "x" en: $2^{x^x}.4^{x^{x+1}}.8^{x^{x+2}}=(2^{x^0}.4^{x^1}.8^{x^2})^4$

Resolución:

Expresando a cada factor en función de la base dos:

$$2^{x^x}.2^{2x^{x+1}}.2^{3x^{x+2}}=(2^{x^0}.2^{2x^1}.2^{3x^2})^4$$

Aplicando leyes de exponentes:

$$2^{x^x+2x^{x+1}+3x^{x+2}}=2^{(3x^2+2x+1).4}$$

Por ser ecuación exponencial:

$$x^x+2x^{x+1}+3x^{x+2}=4(3x^2+2x+1)$$

$$x^x(1+2x+3x^2)=4(3x^2+2x+1)$$

$$x^x=4$$

$$x^x=2^2$$

Por comparación: $\boxed{x=2}$

PROBLEMA 31

Proporcionar un valor de "x" en: $\sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[6]{x^4}^{x^6}}=9$

Resolución:

Reescribiendo la ecuación:

$$\sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[3]{x^6}^{3}}}=9 \quad\rightarrow\quad \sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[3]{x^2}^{\sqrt[3]{x^2}^{9}}}=9=\sqrt[9]{9}^{\sqrt[9]{9}^{\sqrt[9]{9}^{9}}}$$

Por comparación: $\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[9]{9}$

De aquí: $\boxed{x=\sqrt[3]{3}}$



PROBLEMA 32

Calcular el valor de "x" en: $\sqrt{5^x \sqrt[3]{5^x \sqrt[4]{5^x}}} = 5^{34^{-1}}$

Resolución:

Recordar: $\sqrt[m]{x^A \sqrt[n]{x^B \sqrt[p]{x^C}}} = \sqrt[m.n.p]{x^C . x^{B.p} x^{A.n.p}}$

En nuestro caso: $\sqrt[24]{5^x . 5^{4x} 5^{12x}} = 5^{34}$

Aplicando leyes de exponentes: $5^{\frac{17x}{24}} = 5^{34}$

Por ser ecuación exponencial: $\frac{17x}{24} = 34$

Luego: $x = 48$

PROBLEMA 33

Si : $\sqrt[x]{\dfrac{(x-1)^{x^2+1}}{16}} = x(x-2)+1$. Entonces qué valor numérico admite: $M = x^2 - x + 1$

Resolución:

Efectuando el 2º miembro:

$$\sqrt[x]{\frac{(x-1)^{x^2+1}}{16}} = (x-1)^2$$

Elevando a exponente "x" a.a.m:

$$\frac{(x-1)^{x^2+1}}{16} = (x-1)^{2x}$$

$$\frac{(x-1)^{x^2+1}}{(x-1)^{2x}} = 16$$

$$(x-1)^{(x-1)^2}=16=2^4=2^{2^2}$$

Por analogía: $x-1=2$

$x=3$

Luego: $\boxed{M=7}$

PROBLEMA 34

Si: $(x-1)^{-(x-1)^x}=\sqrt[8]{8^{\sqrt[8]{1/8}}}$. Calcular: $K=x^x$

Resolución:

Utilizaremos el criterio de analogía para lo cual se tomará como patron al 1º miembro dando su forma al 2º hasta encontrar cierta similitud para poder comparar:

$$(x-1)^{-(x-1)^x}=\sqrt[8]{8}^{\frac{1}{\sqrt[8]{8}}} \quad \rightarrow \quad (x-1)^{-(x-1)^x}=\left(8^{\frac{1}{8}}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{8}}}$$

$$(x-1)^{-(x-1)^x}=8^{\left(\frac{1}{8}\right)^{9/8}} \quad \rightarrow \quad (x-1)^{-(x-1)x}=\left(\frac{1}{8}\right)^{-\left(\frac{1}{8}\right)^{9/8}}$$

Por analogía: $x-1=\dfrac{1}{8} \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{9}{8}$

Luego: $\boxed{K=\dfrac{9}{8}.\sqrt[8]{\dfrac{9}{8}}}$

PROBLEMA 35

Calcular x en: $\sqrt[x^4]{x^{-3}}=\sqrt[x]{(x^{-1})^{\frac{x^{-1}}{3}}}$; $x>1$

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes



$$x^{\frac{-3}{x^4}} = (x^{-1})^{\frac{x^{-1}}{3x}} \quad \rightarrow \quad x^{\frac{-3}{x^4}} = (x)^{\frac{-1}{3x^2}}$$

Luego: $\dfrac{-3}{x^4} = \dfrac{-1}{3x^2} \quad \rightarrow \quad x^2 = 9$

Como $x > 1$: $\quad \therefore \quad \boxed{x = 3}$

PROBLEMA 36

Proporcionar la menor solución irracional al resolver:

$$(\sqrt{2}+1)^{x^2-2x+1} + (\sqrt{2}-1)^{x^2-2x-1} = 4 + 2\sqrt{2}$$

Resolución:

Descomponiendo convenientemente:

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^{x^2-2x} + \frac{(\sqrt{2}-1)^{x^2-2x}}{(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$$

Multiplicando por: $(\sqrt{2}-1)$ a . a . m:

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^{x^2-2x} + (\sqrt{2}-1)^{x^2-2x} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)$$

Reduciendo: $(\sqrt{2}+1)^{x^2-2x} + (\sqrt{2}-1)^{x^2-2x} = 2\sqrt{2}$

Se observa: $x^2 - 2x = 1 \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 2$

$(x-1)^2 = 2 \quad \leftrightarrow \quad x - 1 = \pm\sqrt{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

Finalmente la solución será: $\boxed{x = 1 - \sqrt{2}}$

PROBLEMA 37

Si se cumple: $2^{2^{\frac{1-x}{x}}} = \left[\sqrt[3^x]{3^x}\right]^3$; $x \neq 1$

¿Cuál es el valor de: $K = \sqrt[2x]{2}^{(\sqrt[x]{2}-1)^2}$?

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes $2^{\sqrt[x]{2}^{1-x}} = (3^x)^{3^{1-x}}$

Para buscar la analogía debemos extraer raíz de índice "x" a.a.m:

$$\sqrt[x]{2^{\sqrt[x]{2}^{1-x}}} = \sqrt[x]{(3^x)^{3^{1-x}}}$$

Recordar: $\sqrt[m]{A^n} = \sqrt[m]{A}^n \ ; A > 0$

Luego: $\sqrt[x]{2}^{\sqrt[x]{2}^{1-x}} = 3^{3^{1-x}}$

Por analogia : $\sqrt[x]{2} = 3$

También: $\sqrt[2x]{2} = \sqrt{3}$

Finalmente: $K = 9$

PROBLEMA 38

Si: $9^x - 4^x = 6^x$. Indicar un valor de: $M = \sqrt[x+1]{3^x(\sqrt{5}-1)}$

Resolución:

De la condición: $9^x - 4^x = 6^x$

Dividimos a. a. m por 6^x:

$$\frac{9^x}{6^x} - \frac{4^x}{6^x} = \frac{6^x}{6^x} \qquad \rightarrow \qquad \frac{3^x}{2^x} - \frac{2^x}{3^x} = 1 \qquad ....(I)$$

Hagamos que: $\frac{3^x}{2^x} = m$; con lo cual $m > 0$

Luego en (I): $m - \frac{1}{m} = 1 \qquad \rightarrow \qquad m^2 - m = 1$



$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\text{, como } m>0\text{; obtenemos:} \qquad m=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Luego: $$\frac{3^x}{2^x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Tratemos de formar: "M" $$\frac{3^x}{2^x}=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]\left[\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1}\right]$$

$$\frac{3^x}{2^x}=\frac{2}{\sqrt{5}-1} \qquad \rightarrow \qquad 3^x(\sqrt{5}-1)=2^{x+1}$$

$$\sqrt[x+1]{3^x(\sqrt{5}-1)}=2$$

Finalmente: $M=2$

PROBLEMA 39

Proporcionar el valor de "M" que verifica: $$\frac{\left[2\sqrt{2^{M+\sqrt{2}}}\right]^{(\sqrt{2}-1)}}{2}=1$$

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes:

$$\left[\sqrt{2^{M+\sqrt{2}+2}}\right]^{(\sqrt{2}-1)}=2 \qquad \rightarrow \qquad \frac{(M+\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-1)}{2}=1$$

$$M+\sqrt{2}+2=\frac{2}{\sqrt{2}-1}$$

Luego: $M+\sqrt{2}+2=2\sqrt{2}+2$

Finalmente $M=\sqrt{2}$

PROBLEMA 40

La diferencia de los valores permisibles para "x" en: $3(3^x+1)=10\sqrt{3}^x$ es:

Resolución:

Hagamos que: $\sqrt{3}^x = m$, luego: $3^x = m^2$

Ahora tenemos: $3(m^2+1)=10m \quad \leftrightarrow \quad 3m^2-10m+3=0$

Factorizando: $(3m-1)(m-3)=0 \quad \leftrightarrow \quad m=1/3 \ \vee \ m=3$

i) Con $m=\dfrac{1}{3}$: $3^x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=3^{-2} \quad \Rightarrow \quad x_1=-2$

ii) Con $m=3$: $3^x=3^2 \quad \Rightarrow \quad x_2=2$

$\therefore \quad x_1-x_2=-4$ ó $x_2-x_1=4$

PROBLEMA 41

Si se cumple: $2^{2x+2}-6^x=2.3^{2x+2}$. Cuál es el valor de $K=\sqrt{2x^2-2}$

Resolución:

Se tiene: $2^2.\,2^{2x}-(2\,.\,3)^x=2.\,3^2\,.\,3^{2x}$

$4.\,2^{2x}-2^x\,.\,3^x=18\,.\,3^{2x}$

$4\,.\,(2^x)^2-(2^x)\,.\,(3^x)-18(3^x)^2=0$

Por aspa simple: $(4\,.\,2^x-9\,.\,3^x).\,(2^x+2\,.\,3^x)=0$

De donde: $4\,.\,2^x-9\,.\,3^x=0 \quad \vee \quad 2^x+2\,.\,3^x=0$

Es evidente que: $4\,.\,2^x-9\,.\,3^x=0 \quad \leftrightarrow \quad 4\,.\,2^x=9\,.\,3^x$

$2^2\,.\,2^x=3^2\,.\,3^x \quad \leftrightarrow \quad 2^{x+2}=3^{x+2}$

Por propiedad: $x+2=0 \quad \leftrightarrow \quad x=-2$

Finalmente: $\therefore \quad K=\sqrt{6}$



PROBLEMA 42

Si se verifica: $\sqrt[x+y]{\left[\dfrac{\sqrt[x]{xy^{-1}}}{\sqrt[y]{x^{-1}y}}\right]^{x^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$. Con: $\{x\,;y\}\subset\mathbf{Z}^+$ proporcionar: $K=(y_{mín})^{(x_{mín})}$

Resolución:
Aplicando leyes de exponentes

$$\sqrt[x+y]{\left[\dfrac{\sqrt[xy]{\dfrac{x^y}{y^y}}}{\sqrt[xy]{\dfrac{y^x}{x^x}}}\right]^{x^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\quad\rightarrow\quad\left[\sqrt[x+y]{\sqrt[xy]{\left(\frac{x}{y}\right)^{(x+y)}}}\right]^{x^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Simplificando: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\left(\frac{x}{y}\right)}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$. Por analogía: $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}$

Luego: $x=t$

$y=3t$ donde; $t\in\mathbf{Z}^+$

Por dato: $x\wedge y$ son números enteros positivos:

$x_{mín}\rightarrow t_{mín}$

$y_{mín}\rightarrow t_{mín}$ ➧ $t_{mín}=1$

Se concluye: $x_{min}=1$

$y_{mín}=3$

Finalmente: $K=3$

PROBLEMA 43

Proporcionar solo el valor positivo de “M” en:

$$(M+1)^{M+2}=\sqrt[M]{\frac{2}{M+1}}$$

Resolución:

Elevando a exponente "M" a.a.m $\left[(M+1)^{M+2}\right]^M=\left[\sqrt[M]{\frac{2}{M+1}}\right]^M$

Efectuando: $(M+1)^{M^2+2M}=\frac{2}{M+1}$

$$(M+1)^{M^2+2M+1}=2$$

$$(M+1)^{(M+1)^2}=2$$

Dando forma al 2º miembro: $(M+1)^{(M+1)^2}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}^2}$

Por analogía: $M+1=\sqrt{2}$

Finalmente: $M=\sqrt{2}-1$

PROBLEMA 44

Si: $x^{(x-1)^2}=2x+1$; $x>0$. Proporcionar el valor numérico de: $K=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes: $\frac{x^{x^2+1}}{x^{2x}}=2x+1$

$$x^{x^2+1}=(2x+1)x^{2x}$$

Multiplicando por "x" a.a.m: $x^{x^2+2}=(2x+1)x^{2x+1}$

Dando forma: $(x^2)x^{(x^2)}=(2x+1)x^{(2x+1)}$

Por analogía: $x^2=2x+1$

Dividamos por: "x" a.a.m. $x=2+\frac{1}{x}$ $\rightarrow$ $x-\frac{1}{x}=2$

Finalmente: $K=4$

PROBLEMA 45

Calcular: "x – y" de: $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt[5]{2\sqrt[7]{11}} & \text{.......(I)} \\ (y+x)^7 = 11.2^{7(x+1-y)} & \text{......(II)} \end{cases}$

Resolución:

De (I): $\sqrt[x-y]{x+y} = \sqrt[35]{2^{42}.11}$

Elevando al exponente "x – y" a. a. m: $(x+y) = \left(\sqrt[35]{2^{42}.11}\right)^{x-y}$ ......(α)

De II: $[(y+x)^7]^5 = [11.2^{7(x+1-y)}]^5$

$$y + x = \sqrt[35]{(11)^5.2^{35(x-y+1)}} \quad \text{......}(\theta)$$

De "α" ∧ "θ": $\left(\sqrt[35]{2^{42}.11}\right)^{x-y} = \sqrt[35]{(11)^5.2^{35(x-y+1)}}$

Elevando al exponente : "35" a.a.m:

$$2^{42(x-y)}(11)^{x-y} = (11)^5 \,.\, 2^{35(x-y+1)}$$

Luego comparando: $\boxed{x - y = 5}$

PROBLEMA 46

Si: $\begin{cases} (mx)^{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m^{m^{-1}}]{m^{-1}} & \text{......(I)} \\ \left(\sqrt[m]{m}y\right)^{\sqrt[m]{y}} = \sqrt[m^{m^{-2}}]{m^{-1}} & \text{.....(II)} \end{cases}$

Proporcionar el valor de: "xy^{-1}"

Resolución:

Elevando (I) al exponente $\sqrt[m]{m}$: $\left[(mx)^{\sqrt[m]{x}}\right]^{\sqrt[m]{m}} = \left[\sqrt[\sqrt[m]{m}]{m^{-1}}\right]^{\sqrt[m]{m}}$

$$(mx)^{\sqrt[m]{mx}} = \frac{1}{m}$$

Sacando raíz de indice "m" a.a.m:

$$\sqrt[m]{mx}^{\sqrt[m]{mx}} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)}$$

Por analogía: $\sqrt[m]{mx} = \frac{1}{m} \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{m^m.m}$ ......(α)

Transformando: (II) y elevando al exponente: $\sqrt[m^2]{m}$ a.a.m:

$$\left[\sqrt[m]{my^m}^{\sqrt[m^2]{y^m}}\right]^{\sqrt[m^2]{m}} = \left[\sqrt[\sqrt[m^2]{m}]{m^{-1}}\right]^{\sqrt[m^2]{m}}$$

$$\sqrt[m]{my^m}^{\sqrt[m^2]{my^m}} = \frac{1}{m}$$

Extrayendo raíz de indice "m" a.a.m:

$$\sqrt[m^2]{my^m}^{\sqrt[m^2]{my^m}} = \left(\frac{1}{m}\right)^{\left(\frac{1}{m}\right)}$$

Por analogía: $\sqrt[m^2]{my^m} = \frac{1}{m} \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{\sqrt[m]{m^{m^2}.m}}$ ....(θ)

Efectuando α ÷ θ:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[m]{m^{m^2}.m}}{m^m.m} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[m]{m^{m^2}.m}}{\sqrt[m]{m^{m^2}.m^m}}$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt[m]{\frac{m^{m^2}.m}{m^{m^2}.m^m}} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{y} = \sqrt[m]{\frac{m}{m^m}}$$

$$\therefore \quad \boxed{xy^{-1} = \sqrt[m]{m^{1-m}}}$$



PROBLEMA 47

Proporcionar el valor de: $K=\sqrt{40+27^{x}}$

Sabiendo que "x" es la solución irracional de la ecuación: $6^{x^{-1}}=\dfrac{3^{x}}{2}$

Resolución:

$$K=\sqrt{40+(3^{x})^{3}} \qquad ....(I)$$

Del dato: $6^{\frac{1}{x}}=\dfrac{3^{x}}{2} \quad \rightarrow \quad 3^{\frac{1}{x}}.\,2^{\frac{1}{x}}=\dfrac{3^{x}}{2}$

$$2^{\frac{1}{x}+1}=3^{x-\frac{1}{x}} \quad \rightarrow \quad 2^{\frac{x+1}{x}}=3^{\frac{(x+1)(x-1)}{x}}$$

Extrayendo raíz de índice $\dfrac{x+1}{x}$ a.a.m: $2=3^{x-1}$

$$3^{x}=6$$

En (I): $K=\sqrt{40+6^{3}}=\sqrt{256}$

Finalmente: $\boxed{K=16}$

PROBLEMA 48

Calcular el valor más simple de:

$$K=\frac{3+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+............\infty}}}\right]^{2}}{1+\left[\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+............\infty}}}\right]^{-1}}$$

Resolución:

Hagamos: $\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+............\infty}}}=A \qquad ......(I)$

Luego: $K=\dfrac{3+A^2}{1+A^{-1}} \rightarrow K=\dfrac{3A+A^3}{A+1}$ ....(II)

De (I): $A=\sqrt[3]{4+\underbrace{\sqrt[3]{4+\sqrt[3]{4+..........\infty}}}_{A}}$

$A=\sqrt[3]{4+A}$

Elevando al cubo: $A^3=A+4$

En (II): $K=\dfrac{3A+A+4}{A+1}=\dfrac{4(A+1)}{A+1}$

Finalmente: $\boxed{K=4}$

PROBLEMA 49

Si se verifica: $\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3\sqrt{x^4.......\text{n radicales}}}}}=x^{\frac{2^{26}-1}{2^{25}}}$

Calcular: $M=\dfrac{n+2}{4}$

Resolución:

Por inducción en el 1º miembro:

1 Raíz: $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{4-3}{2^1}}=x^{\frac{2^2-(2+1)}{2^1}}$

2 Raices: $\sqrt{x\sqrt{x^2}}=x^{\frac{4}{4}}=x^{\frac{8-4}{2^2}}=x^{\frac{2^3-(2+2)}{2^2}}$

3 Raices: $\sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}}=x^{\frac{11}{8}}=x^{\frac{16-5}{2^3}}=x^{\frac{2^4-(2+3)}{2^3}}$

⋮

Para "n" raices..........$=x^{\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n}}$



Luego: $x^{\frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n}} = x^{\frac{2^{26}-1}{2^{25}}} \rightarrow \frac{2^{n+1}-(2+n)}{2^n} = \frac{2^{26}-1}{2^{25}}$

Dando forma al 2º miembro:

$$\frac{2^{26}-1}{2^{25}} = \left[\frac{2^{26}-1}{2^{25}}\right]\left[\frac{2^5}{2^5}\right] = \frac{2^{31}-2^5}{2^{30}}$$

$$\frac{2^{26}-1}{2^{25}} = \frac{2^{31}-(2+30)}{2^{30}}$$

$$n = 30$$

Finalmente: $\boxed{M = 8}$

PROBLEMA 50

Si los términos: $\sqrt[n]{2x\sqrt[n]{y}}$; $\sqrt[m]{3y\sqrt{x}}$

Son semejantes, calcular su suma.

Resolución:

Recordar: "Dos términos serán semejantes si presentan iguales variables y con respecto a la variable común iguales exponentes"

En el problema:

$$\sqrt[n^2]{2^n x^n y} \sim \sqrt[2m]{9y^2 x}$$

$$\sqrt[n^2]{2^n}\ \sqrt[n^2]{x^n}\ \sqrt[n^2]{y} \sim \sqrt[2m]{9}\ \sqrt[2m]{y^2}\ \sqrt[2m]{x}$$

$$\sqrt[n]{2}\ \sqrt[n]{x}\ \sqrt[n^2]{y} \sim \sqrt[m]{3}\ \sqrt[m]{y}\ \sqrt[2m]{x}$$

$$\sqrt[n]{2}\ x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n^2}} \sim \sqrt[m]{3}\ x^{\frac{1}{2m}} y^{\frac{1}{m}}$$

Se cumple: $\frac{1}{n} = \frac{1}{2m} \wedge \frac{1}{n^2} = \frac{1}{m}$

$$n = 2m \quad \wedge \quad m = n^2$$

Luego de ambas ecuaciones: $n = 2n^2 \Rightarrow n = 1/2$

$m = 1/4$

Hallemos la suma: $\int = \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[m]{3}\right) x^{\frac{1}{n}} y^{\frac{1}{n^2}}$

$\int = (2^2 + 3^4)\, x^2 y^4$

Finalmente: $\boxed{\int = 85x^2y^4}$

PROBLEMA 51

La siguiente expresión puede reducirse a un monomio, según esto proporcionar su valor reducido.

$$R(x) \equiv (a+b^2)\sqrt[a-b]{x^6} - ab\sqrt[a+b]{x^4} + (b-a)x$$

Resolución:

Si $R(x)$ es un monomio

Se cumple: $\dfrac{6}{a-b} = \dfrac{4}{a+b} = 1$ Se plantea: $\left.\begin{array}{l} a+b=4 \\ a-b=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=5 \\ b=-1 \end{array}$

Luego: $R(x) \equiv (a + b^2 - ab + b - a)x$

$R(x) \equiv (b^2 - ab + b)x$

$R(x) \equiv (1 + 5 - 1)x$

Finalmente $\boxed{R(x) = 5x}$

PROBLEMA 52

Si la expresión: $F(x\,;\,y) \equiv nx^{n+1}\,y^{2-n}$

Es racional entera clasifíquese al equivalente de la expresión:

$$P(x\,;\,y) \equiv \sqrt[n^2-1]{n^{-1}x^{n+4}y^{3n}}$$



Resolución:

Si la expresión: $nx^{n+1}\,y^{2-n}$ es racional entera:

Se cumple: $n+1 \geq 0 \;\wedge\; 2-n \geq 0$

$n \geq -1 \;\wedge\; n \leq 2$

$n = \{-1, 0, 1, 2\}$ posibles valores .....(I)

Además: $n^2 - 1 =$ índice de un raíz

Luego: $n^2 - 1 \geq 1$

$n^2 \geq 2$ .....(II)

Analizando (I) en (II): $n = 2$

Ahora: $\sqrt[n^2-1]{n^{-1}x^{n+4}y^{3n}} = \sqrt[3]{2^{-1}x^6y^6}$

$$\sqrt[n^2-1]{n^{-1}x^{n+4}y^{3n}} = \frac{x^2y^2}{\sqrt[3]{2}}$$

$\therefore$ P(x ; y) es una expresión algebraica racional entera.

PROBLEMA 53

Proporcionar el valor de "**n**" para el cual la expresión:

$$M(x) \equiv \frac{[(x^{n-2})^3\,x^{2n-3}]^2 \cdot x^4}{[(x^n)^2 \cdot x^4]^2}$$ sea de segundo grado:

Resolución:

Aplicando leyes de exponentes:

$$M(x) \equiv \frac{(x^{3n-6+2n-3})^2 \cdot x^4}{(x^{2n+4})^2} \quad \rightarrow \quad M(x) \equiv \frac{x^{10n-18+4}}{x^{4n+8}} = x^{6n-22}$$

Grado de $M(x) = 6n - 22$ Dato: $6n - 22 = 2$

Finalmente: $n = 4$

PROBLEMA 54

Calcular "a + b " si el grado del monomio: $Q(x\,;\,y) \equiv (a+b)x^{2(a-1)}y^{3b}$ es 17

Además su coeficiente tiene el mismo valor que el grado relativo a "x"

Resolución:

Recordar: Grado = Grado absoluto

Luego: $2(a-1)+3b=17 \quad \rightarrow \quad 2a+3b=19 \quad ....(I)$

También: $GR(x)=a+b$

$2(a-1)=a+b \quad \rightarrow \quad a-2=b \quad ...(II)$

De (I) $\wedge$ (II): $2a+3(a-2)=19 \quad \rightarrow \quad a=5 \;\wedge\; b=3$

Finalmente: $a+b=8$

PROBLEMA 55

Si en: $M(x;\,y;\,z) \equiv x^{a+b}y^{b+c}z^{a+c}$

los grados relativos a: x, y, z son números pares consecutivos y la suma de los productos tomados de dos en dos de: a,b y c es 23. Hallar "a.b.c"

Resolución:

Se plantea:

$$\left.\begin{array}{l} GR(x)=a+b \\ GR(y)=b+c=a+b+2 \\ GR(z)=a+c=b+c+2=a+b+4 \end{array}\right\} \text{Son números pares consecutivos}$$

De GR(z) $a=b+2$

$c=b+4$

Dato: $ab+bc+ac=23$

$(b+2)b+b(b+4)+(b+2)(b+4)=23$

$b^2+4b-5=0$

Factorizando: $(b+5)(b-1)=0$

Entonces: $b-5 \;\vee\; b=1 \quad ; \quad a=-3 \;\vee\; a=3 \quad ; \quad c=-1 \;\vee\; c=5$

Luego: $a.b.c=-15 \;\vee\; abc=15$



PROBLEMA 56

Si: $a^2 - 3a + 4 = 0$

Calcular el grado de: $K = \sqrt[a-2]{x^{a-1}} \cdot \sqrt[a-1]{x^{a-2}}$ donde " x " es la variable

Resolución:

Transformando la expresión:

$$K = x^{\frac{a-1}{a-2}}\ x^{\frac{a-2}{a-1}} \quad \rightarrow \quad K = x^{\frac{a-1}{a-2}+\frac{a-2}{a-1}}$$

$$K = x^{\frac{2a^2-6a+5}{a^2-3a+2}}$$

Busquemos el dato en el exponente: $K = x^{\frac{2(a^2-3a+4)-3}{(a^2-3a+4)-2}}$

Por dato: $a^2 - 3a + 4 = 0$ Luego: $K = x^{\frac{-3}{-2}} = x^{\frac{3}{2}}$

$\therefore$ **Grado = 3/2**

PROBLEMA 57

Calcular el grado de: $P(x) \equiv \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[15]{x} \cdot \sqrt[35]{x} \cdot \sqrt[63]{x}$......... "n" factores

Resolución:

Efectuando: $P(x) \equiv x^{\frac{1}{3}}\ x^{\frac{1}{15}}\ x^{\frac{1}{35}}\ x^{\frac{1}{63}}$............ "n" factores

$$P(x) \equiv x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\ldots\ \text{"n" sumandos}} = x^E$$

Donde: Grado de $P(x) = E$

Hallemos "E" $E = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \ldots$ "n" sumandos

$$E = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \ldots \text{"n" sumandos}$$

Se observa que la forma general que presenta cada denominador es la siguiente: $(2n-1)(2n+1)$

Luego: $$E=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\dots\dots\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Multiplicando por 2 a.a.m para poder descomponer:

$$2E=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\frac{2}{5.7}+\frac{2}{7.9}+\dots\dots\dots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$2E=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\dots\dots\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

Reduciendo: $$2E=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$$

Finalmente: $$E=\frac{n}{2n+1}$$

PROBLEMA 58

¿Cuántas letras se deben considerar para que el grado absoluto del monomio:

$$M(a, b, c, d,\dots)\equiv a^6b^{24}c^{60}d^{120}\dots\dots\dots \text{sea } 6006?$$

Resolución:

Sea "**n**" la cantidad de letras que se debe considerar.

Además sabemos que el grado absoluto del monomio esta dado por el valor de la suma de todos los exponentes de las letras existentes:

Luego: 6 + 24 + 60 + 120 +...."n" sumandos = grado absoluto

18 . 36 60

18 24

6 = cte

El análisis de la serie indica ser suma de cubos más algo:

$6+24+60+120+\dots\dots\dots$ "n" sumandos = Grado absoluto

$2^3-2+3^3-3+4^3-4+5^3-5+\dots\dots\dots$"n" sumandos = 6006

Analizando para hallar el último sumando:



$1^{\underline{o}}$ sumando $= 2^3 - 2$

$2^{\underline{o}}$ sumando $= 3^3 - 3$

$3^{\underline{o}}$ sumando $= 4^3 - 4$

$\vdots$

$n^{\underline{o}}$ sumando $= (n+1)^3 - (n+1)$

Ahora: $\quad 2^3 - 2 + 3^3 - 3 + 4^3 - 4 + 5^3 - 5 + \ldots + (n+1)^3 - (n+1) = 6006$

Recordar que $\forall n \in \mathbf{Z}^+$

I) $\quad 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

II) $\quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

En el problema

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + (n+1)^3 - 2 - 3 - 4 - 5 \ldots - (n+1) = 6006$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \ldots + (n+1)^3 - [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots (n+1)] = 6006$$

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 6006$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right] = 6006$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] = 11.6.13.7$$

$$(n+1)(n+2)(n)\,(n+3) = 2.\,2\,.\,11\,.\,6\,.\,13\,.\,7$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = 11\,.\,12\,.\,13\,.\,14$$

Por comparación: $\quad n = 11$

$\therefore$ **Se debe considerar 11 letras**

PROBLEMA 59

Dado: $P(x) \equiv (3x^{n^{n^n}} - 7x^n + 3)^{n^{n^n}}$

$Q(x) \equiv (3x^{n^{n^n}} - 7x + 1)^2$

$R(x) \equiv 11x + 1$

Si Grado de $P(x) \, . \, Q(x) \, . \, R(x) = 289$

Calcular el grado de $M(x)$ siendo: $M(x) \equiv (11x^{n^n} + 1)^2(x^{2n} - x^n)$

Resolución:

Aplicando teoría de grados:

$$\text{Grado de } P(x) = n^{n^n} \, . \, n^{n^n} = n^{2n^n}$$

$$\text{Grado de } Q(x) = n^{n^n} \, . \, 2 = 2n^{n^n}$$

$$\text{Grado de } R(x) = 1$$

$$\text{Grado de } P(x) \, . \, Q(x) \, . \, R(x) = (n^{n^n})^2 + 2(n^{n^n}) + 1$$

$$289 = (n^{n^n} + 1)^2$$

$$17 = n^{n^n} + 1$$

$$16 = n^{n^n}$$

$$2^{2^2} = n^{n^n}$$

Reconociendo: $n = 2$

Grado de $M(x)$: $2n^n + 2n$

Finalmente: **Grado de $M(x) = 12$**

PROBLEMA 60

Calcular el grado absoluto de:

$$R(x;y;z) \equiv \sqrt[(a+b)^2+c^2]{x^{7a^2} \cdot y^{6bc} \cdot z^{2ac}}$$

Sabiendo que: $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{b}{b+c} = \dfrac{c}{a+c}$



Resolución:

Del dato: $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{c}{a+c}=k$

Aplicando propiedad de una serie de razones equivalentes:

$$\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=k$$

Ahora: $k=1/2$

Luego: $\dfrac{a}{a+b}=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ \dfrac{b}{b+c}=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ \dfrac{c}{a+c}=\dfrac{1}{2}$

$$a=b\ \wedge\ b=c\ \wedge\ c=a$$

Conclusión: $a=b=c$

Hallemos lo pedido:

$$\text{Grado de } R(x;y;z)=\frac{7a^2+6bc+2ac}{(a+b)^2+c^2}=\frac{7a^2+6a^2+2a^2}{(2a)^2+a^2}$$

$$\text{Grado de } R(x;y;z)=\frac{15a^2}{5a^2}$$

Finalmente: **Grado de $R(x;y;z)=3$**

PROBLEMA 61

Calcular "m + n" si el polinomio:

$$P(x;y)\equiv 3x^{2m+n-4}y^{m+n+2}+5x^{2m+n-3}y^{m+n+1}-7x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

Es de grado absoluto 10 y la diferencia entre los grados relativos a "x" e "y" es : 4

Resolución:

Analizando: Grado de $P(x;y)=3m+2n-2$

$GR(x)=2m+n-2\ \wedge\ GR(y)=m+n+2$

Dato: $3m+2n-2=10\ \wedge\ 2m+n-2-(m+n+2)=4$

$3m+2n=12\ \wedge\ m=8$

Luego: $n = -6$ $\therefore$ $m + n = 2$

PROBLEMA 62

Se tienen los polinomios

$$P(x;y) \equiv x^{m^2+1}y^{\sqrt{m-n}} + 2x^{m^2-1}y^{\sqrt{m+n-1}} + x^{m^2}y^{\sqrt{m+n+4}}$$

$$Q(x\,;\,y) \equiv x^{m+7}y^{n^3-6} - x^{m}y^{n^3-2} + 3x^{m+1}y^{n^3-3}$$

Si el polinomio "P" es de grado 10 respecto a "x" además en el polinomio "Q" el grado de "x" es igual al grado de "y" aumentado en 4 calcular el grado de "P".

Resolución:

Observando al polinomio Q reconocemos que: $m \in \mathbf{N}$

En: $P(x\,;\,y)$ $GR(x) = m^2 + 1$

$10 = m^2 + 1 \Rightarrow m = 3$

En: $Q(x\,;\,y)$ $GR(x) = GR(y) + 4$

$m + 7 = n^3 - 2 + 4$

$n = 2$

Luego: Grado de $P(x\,;\,y) = m^2 + \sqrt{m+n+4}$

Grado de $P(x\,;\,y) = 12$

PROBLEMA 63

Determinar en cuánto difieren los coeficientes "p" y "q" para que con cualquier valor de "x" se verifique:

$$27 + 8x \equiv p(x+4) + q(2x+3)$$

Resolución:

Efectuando en el segundo miembro: $27 + 8x \equiv (p+2q)x + 4p + 3q$

Por ser identidad: $p + 2q = 8 \quad \wedge \quad 4p + 3q = 27$

$4p + 8q = 32 \quad \wedge \quad 4p + 3q = 27$



De ambas ecuaciones: $8q + 27 - 3q = 32$

$q = 1 \quad \wedge \quad P = 6$

Se pide: $p - q = 5$

PROBLEMA 64

Dado el siguiente polinomio idénticamente nulo:

$$P(x) \equiv b(x^2 + x) - 2ax^2 - 3cx + c - a + 1$$

Calcular : $K = ac - b$

Resolución:

Ordenando: $P(x) \equiv (b - 2a)x^2 + (b - 3c)x + c - a + 1$

Condición: $P(x) \equiv 0$

Se cumple: $b - 2a = 0 \quad \wedge \quad b - 3c = 0 \ \wedge \ c - a + 1 = 0$

$b = 2a \quad \wedge \quad b = 3c \quad \wedge \quad a - c = 1$

$2a = 3c \quad \wedge \quad 2a - 2c = 2$

De estas dos últimas ecuaciones:

$c = 2 \quad \wedge \quad a = 3$

También: $b = 6$

Luego: $K = 0$

PROBLEMA 65

Calcular: "M + N + P" en la identidad:

$$50x^3 + 5x^2 - 8x + 1 \equiv M(Nx + 1)^M . (Px - M)^N$$

Resolución:

Analizando: $M + N = 3 \ /\{M ; N\} \subset \mathbb{Z}^+$

Para el termino independiente: $1 = M(1)^M(-M)^N$; como : $N \neq 0$

Se concluye: $N = 2 \quad \wedge \quad M = 1$

Para el coeficiente principal: $50 = M . (N)^M . (P)^N$

$$50 = 2P^2$$

$$P = 5$$

Luego: $M + N + P = 8$

PROBLEMA 66

Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo:

$$P(x) \equiv c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

Resolución:

Efectuando: $P(x) \equiv (c + b)x^a + (c + a)x^b + (a + b)x^c + abc$

Se pide: $E = 2(a + b + c) + abc$

Observar que $P(x)$ tiene 4 términos

Luego: a, b, c deben ser: 1, 2, 3 en cualquier orden, no se asumirá valores ya que siempre se cumplirá:

$$a + b + c = 6 \quad \wedge \quad a \cdot b \cdot c = 6$$

Finalmente: $E = 18$

PROBLEMA 67

Si el polinomio ordenado decrecientemente y completo:

$$M(x) \equiv x^{2n+1} + 2x^{p+3} - 3x^{m+2} + \ldots\ldots\ldots\blacktriangle$$

Posee 2m terminos hallar "p"

Resolución:

Se cumple: $\underbrace{2n + 1 - (p + 3) = 1 \quad 2n - p = 3 \quad 2n - p = 3}_{I} \;\wedge\; \underbrace{p + 3 - (m + 2) = 1 \quad p - m = 0 \quad p = m}_{II} \;\wedge\; \underbrace{2n + 2 = 2m \quad n + 1 = m \quad n + 1 = m}_{III}$

Con II → I: $2n - m = 3 \ldots\ldots\text{“}\alpha\text{”}$

De III y α: $\left.\begin{matrix} n + 1 = m \\ 2n - m = 3 \end{matrix}\right\} \quad 2n - n - 1 = 3$



$n = 4$

$\Rightarrow m = 5$

Finalmente: $p = 5$

PROBLEMA 68

En el polinomio: $P(x+1) \equiv (2x+1)^n + (x+2)^n - 128(2x+3)$

Donde "n" es impar, la suma de coeficientes y el término independiente en $P(x)$ suman uno, calcular el valor de "n".

Resolución:

Recordar:

Dado: $P(x) \equiv A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + ... + A_n$

Se cumple: TI en $P(x) = P(0)$

Σcoef de $P(x) = P(1)$

En el problema hagamos que: $x + 1 = m \quad \rightarrow \quad x = m - 1$

$$P(m) = (2m - 2 + 1)^n + (m - 1 + 2)^n - 128(2m - 2 + 3)$$

$$P(m) = (2m - 1)^n + (m + 1)^n - 128(2m + 1)$$

Luego:

$$P(x) \equiv (2x - 1)^n + (x + 1)^n - 128(2x + 1) \qquad ....(I)$$

Condición: $P(1) + P(0) = 1$

De (I): $P(1) = 1 + 2^n - 384 = 2^n - 383$

$P(0) = -1 + 1 - 128 = -128$

Sumando: $1 = 2^n - 511$

$2^n = 512 = 2^9$

Comparando: $n = 9$

PROBLEMA 69

Si: $P(x - 2y; x + y) \equiv 3x + y$

Determine la fórmula de $P(x - y\,;\, x + 2y)$

Resolución:

En el polinomio dato hagamos un cambio de variable: $\begin{cases} x-2y=\mu \\ x+y=v \end{cases}$

Resolviendo el sistema formado, obtenemos:

$$x=\frac{\mu+2v}{3} \quad \wedge \quad y=\frac{v-\mu}{3}$$

Ahora el polinomio dato se transforma en:

$$P(\mu;\,v)\equiv 3\left(\frac{\mu+2v}{3}\right)+\frac{v-\mu}{3} \quad \Rightarrow \quad P(\mu;\,v)\equiv\frac{2\mu+7v}{3}$$

Finalmente reemplazando "μ" por $(x-y)$ y "v" por $(x+2y)$ tenemos:

$$P(x-y\,;\,x+2y)\equiv\frac{2(x-y)+7(x+2y)}{3}$$

$$P(x-y\,;\,x+2y)\equiv\frac{9x+12y}{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{P(x-y\,;\,x+2y)\equiv 3x+4y}$$

PROBLEMA 70

Si: $P(x)\equiv\dfrac{3x+4}{2x-3}$. Calcular: $E=P(P(P(P(2010))))$

Resolución:

Sería muy tedioso iniciar la resolución hallando P(2010), pero si recuerdas la siguiente propiedad:

$$P(x)\equiv\frac{ax+b}{cx-a} \quad \rightarrow \quad \underbrace{P(P(P.........P(P(x))}_{m\ \text{veces}}..............))=\begin{cases}\text{Si m es par}: x \\ \text{Si m es impar}: P(x)\end{cases}$$

Resulta que: $E=P(P(P(P(x))))$; para $x=2010$

$E=x$

$$\therefore \quad \boxed{E=2010}$$

PROBLEMA 71

Si P es un polinomio que verifica $P(P(P(x))) = 27x + 52$

Calcular $P(-2)$

Resolución:

Fácilmente podemos apreciar que $P(x)$ es un polinomio de 1º grado, es decir su forma general es $P(x) \equiv ax + b$

Por propiedad se plantea: $$P(P(P(x))) \equiv a^3x + b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)$$

Por condición se tendrá: $$27x + 52 \equiv a^3x + b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right)$$

Ahora de la identidad: $a^3 = 27 \quad \rightarrow \quad a = 3$

Asímismo también se cumple: $$b\left(\frac{a^3-1}{a-1}\right) = 52$$

$b(13) = 52 \quad \rightarrow \quad b = 4$

Finalmente el polinomio será: $P(x) \equiv 3x + 4$

$\therefore \quad \boxed{P(-2) = -2}$

PROBLEMA 72

Sabiendo que se cumple: $P(x-3) = 4x - 7$

$P[Q(x)] = 52x - 55$

Determinar $Q(5)$

Resolución:

De: $P(x-3) = 4x - 7$

Sea: $x - 3 = m \quad \rightarrow \quad x = m + 3$

Entonces: $P(m) = 4m + 5$

Sea: $m = Q(x) \quad \rightarrow \quad P[Q(x)] = 4Q(x) + 5$

$52x - 55 = 4Q(x) + 5$

$13x - 15 = Q(x)$

Luego hallemos Q(5):

$$Q(5) = 13(5) - 15 = 65 - 15$$

$$\boxed{Q(5) = 50}$$

PROBLEMA 73

Si: $F(x) = x^4 + 2x^2 + 2$

$$F[G(x)] = x^4 - 4x^2 + 5$$

Determinar una fórmula de $G(x)$

Resolución:

Por cambio de variable: $F(x) = x^4 + 2x^2 + 2 = (x^2+1)^2 + 1$ ....(α)

$$F[G(x)] = x^4 - 4x^2 + 5 = (x^2-2)^2 + 1 \quad ....(\theta)$$

En (α) hagamos $x = G(x)$:U$F[G(x)] = ([G(x)]^2 + 1)^2 + 1$

De "θ": $(x^2-2)^2 + 1 = ([G(x)]^2 + 1)^2 + 1$

$$(x^2-2)^2 = ([G(x)]^2 + 1)^2$$

Una expresión: $x^2 - 2 = [G(x)]^2 + 1 \quad \rightarrow \quad x^2 - 3 = [G(x)]^2$

Finalmente: $\boxed{G(x) = \pm\sqrt{x^2-3}}$

PROBLEMA 74

Si: $Q(x) = 2x + 3$ ....(I)

$$Q[F(x) + G(x)] = 4x + 3 \quad ....(II)$$

$$Q[F(x) - G(x)] = 7 \quad ....(III)$$

Calcular: $M = \underbrace{F(G(F(G(.......(F(G(1)))}_{100 \text{ veces}}.........))))$

Resolución:

De (II) y (I): $Q[F(x) + G(x)] = 2[F(x) + G(x)] + 3$

$$4x + 3 = 2[F(x) + G(x)] + 3$$

$$F(x) + G(x) = 2x \quad .... (\alpha)$$



De (III) y (I): $Q[F(x)-G(x)] = 2[F(x)-G(x)]+3$

$$7 = 2[F(x)-G(x)]+3$$

$$F(x)-G(x) = 2 \qquad ....(\theta)$$

De "α" y "θ": $F(x) = x+1 \quad \wedge \quad G(x) = x-1$

Luego en "M": $M = F(G(F(G(.........(F(G(1))).........))))$

Observar que: $G(1) = 0$
$F(0) = 1$

Finalmente: $\boxed{M = F(0) = 1}$

PROBLEMA 75

Si $F\left(\dfrac{ax+b}{ax-b}\right) = \dfrac{a}{b}x$; $\forall a, b \in \mathbf{Z}^{+}$. Calcular: $M = \underbrace{F(F(F(..........F(7)}_{2ab \text{ veces}}............)))$

Resolución:

Hagamos: $\dfrac{ax+b}{ax-b} = m$

Aplicando propiedad de razones: $\dfrac{ax}{b} = \dfrac{m+1}{m-1}$

Reemplazando: $F(m) = \dfrac{m+1}{m-1}$

Luego: $F(7) = 4/3$
$F(4/3) = 7$

Analizando $\begin{cases} \text{M: par} \rightarrow 7 \\ \text{M: impar} \rightarrow 4/3 \end{cases}$

En el problema: $\boxed{M = 7}$

PROBLEMA 76

Siendo: $\begin{cases} x = a-b \\ y = ab \end{cases}$

Determine la raíz cúbica de: $(a-b+y)(y^2-xab+x^2)-x^3$

Resolución:

Sea: $T=(a-b+y)(y^2-xab+x^2)-x^3$

$T=[(a-b)+y][x^2-x(ab)+y^2]-x^3$

Reemplazando los datos: $T=[x+y][x^2-xy+y^2]-x^3$

Observar que la expresión indicada equivale a una suma de cubos:

$$T=x^3+y^3-x^3 \quad \Rightarrow \quad T=y^3$$

Finalmente la raíz cúbica de "T" será:

$$\therefore \quad \boxed{\sqrt[3]{T}=y}$$

PROBLEMA 77

A partir de: $x=\sqrt[3]{3+z^3}=\sqrt{3+z^2}$

Calcular la raíz cúbica de: $\dfrac{x^9-9x^3z^3-z^9}{x^6-6x^2z^2-z^6}$

Resolución:

$$x=\sqrt[3]{3+z^3} \quad \Rightarrow \quad x^3-z^3=3 \qquad ....(I)$$

$$x=\sqrt{2+z^2} \quad \Rightarrow \quad x^2-z^2=2 \qquad ....(II)$$

Elevando al cubo (I) según Cauchy

$$x^9-z^9-3(x^3z^3)(x^3-z^3)=27 \quad \rightarrow \quad x^9-z^9-3x^3z^3.(3)=27$$

Es decir: $x^9-9x^3z^3-z^9=27 \quad ....(\alpha)$

Elevando al cubo (II) según Cauchy

$$x^6-z^6-3(x^2z^2)(x^2-z^2)=8 \quad \rightarrow \quad x^6-z^6-3x^2z^2.(2)=8$$

Es decir: $x^6-6x^2z^2-z^6=8 \quad ....(\theta)$

Sea: $T=\dfrac{x^9-9x^3z^3-z^9}{x^6-6x^2z^2-z^6}$

Reemplazando $(\alpha) \wedge (\theta)$ se tendrá:

$$T=\frac{27}{8} \qquad \therefore \qquad \boxed{\sqrt[3]{T}=\frac{3}{2}}$$

PROBLEMA 78

Si se cumple: $\sqrt{(ab)^{n(n+1)}}=\frac{1}{4^n}$

Calcular el valor de:

$$T=[(a+b)^2-(a-b)^2][(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2]........[(a^n+b^n)^2-(a^n-b^n)^2]$$

Resolución:

Veamos el valor pedido:

$$T=[(a+b)^2-(a-b)^2][(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2]........[(a^n+b^n)^2-(a^n-b^n)^2]$$

Aplicando la equivalencia de Legendre en cada uno de los factores se tendrá:

$$T=[4(ab)]\cdot[4(a^2b^2)]........[4(a^nb^n)]$$

Notar que existen "n" factores.

$$T=\underbrace{4\,.\,4\,.\,4\,.......4}_{\text{n veces}}\,.\,(ab)(ab)^2........(ab)^n$$

$$T=4^n(ab)^{1+2+.....+n}$$

$$T=4^n(ab)^{\frac{n(n+1)}{2}}=4^n\sqrt{(ab)^{n(n+1)}}$$

Por dato: $\sqrt{(ab)^{n(n+1)}}=\frac{1}{4^n}$

Luego: $T=4^n\cdot\frac{1}{4^n} \qquad \therefore \qquad \boxed{T=1}$

PROBLEMA 79

Si: $\sqrt[x]{mn}+\sqrt[x]{pq}=6$

$$\sqrt[x]{m^2.n^2}-\sqrt[x]{p^2.q^2}=24.\ \text{Calcular: } \sqrt[x]{mn}-\sqrt[x]{pq}$$

Resolución:

De los datos: $(\sqrt[x]{mn})^2 - (\sqrt[x]{pq})^2 = 24$

Por diferencia de cuadrados: $(\sqrt[x]{mn} + \sqrt[x]{pq})(\sqrt[x]{mn} - \sqrt[x]{pq}) = 24$

$$(6)(\sqrt[x]{mn} - \sqrt[x]{pq}) = 24$$

$$\therefore \quad \boxed{\sqrt[x]{mn} - \sqrt[x]{pq} = 4}$$

PROBLEMA 80

Al reducir: $(a+b)^3 + (a-b)^3 - 8a^3 + 6a(a-b)(a+b)$

Se obtiene:

Resolución:

Sea "N" la expresión dada, la cual se podrá escribir así:

$$N = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 6a(a-b)(a+b) - 8a^3$$

Reacomodando el segundo miembro

$$N = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 3(2a)(a-b)(a+b) - 8a^3$$

$$N = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 3(a-b)(a+b)[(a+b) + (a-b)] - 8a^3$$

Notar que la expresión señalada fue obtenida según la equivalencia de Cauchy.

$$N = [(a+b) + (a-b)]^3 - 8a^3$$

$$N = [2a]^3 - 8a^3 = 8a^3 - 8a^3$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 0}$$

PROBLEMA 81

Si: $x + y + z = 0$; calcular el valor de:

$$\frac{(x+y-2z)^3 + (y+z-2x)^3 + (x+z-2y)^3}{xyz}$$

Resolución:

Sea "T" el valor pedido: $T = \dfrac{(x+y-2z)^3 + (y+z-2x)^3 + (x+z-2y)^3}{xyz}$



De la condición; $x + y + z = 0$; se obtiene: $x + y = -z \quad \wedge \quad y + z = -x \quad \wedge \quad x + z = -y$

Luego reemplazando:

$$T = \frac{(-3z)^3 + (-3x)^3 + (-3y)^3}{xyz} \quad \rightarrow \quad T = \frac{-27(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}$$

No olvidar que si: $\quad x + y + z = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Finalmente: $\quad T = \frac{-27(3xyz)}{xyz} = (-27)(3)$

$$\therefore \quad \boxed{T = -81}$$

PROBLEMA 82

Determine el equivalente de: $\quad (x^2 + x - 4)^2 - (x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

Resolución:

Sea "T" el equivalente: $\quad T = (x^2 + x - 4)^2 - (x-2)(x-1)(x+2)(x+3)$

Reacomodando la expresión para utilizar la 1º equivalencia de Steven:

$$T = (x^2 + x - 4)^2 - \underbrace{(x-2)(x+3)}\underbrace{(x-1)(x+2)}$$

$$T = (x^2 + x - 4)^2 - (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$$

Hagamos que $x^2 + x = m$: $\quad T = (m-4)^2 - (m-6)(m-2)$

$$T = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 8m - 12 = 16 - 12$$

$$\therefore \quad \boxed{T = 4}$$

PROBLEMA 83

Si: $5a + 5c + ac = 0$. $\quad$ Calcular el valor de $\dfrac{5ac}{(a+5)(5+c)(a+c)}$

Resolución:

Sea "N" el valor pedido: $\quad N = \dfrac{5ac}{\underbrace{(5+a)(5+c)}(a+c)}$

Efectuando la multiplicación indicada:

$$N=\frac{5ac}{(25+5a+5c+ac)(a+c)}$$

Como $5a+5c+ac=0$ $\Rightarrow$ $N=\frac{5ac}{(25)(a+c)}=\frac{ac}{5(a+c)}$

También del dato: $ac=-5(a+c)$

Luego en N: $N=\frac{-5(a+c)}{5(a+c)}$ $\therefore$ $\boxed{N=-1}$

PROBLEMA 84

Si: $a=2+\sqrt{3}$; $b=1-2\sqrt{3}$ $\wedge$ $c=\sqrt{3}-3$

Halle el valor de: $\frac{a(a+1)(a-1)+b(b+1)(b-1)+c(c+1)(c-1)}{a(bc+1)+b(ac+1)+c(ab+1)}$

Resolución:

Sea "T" el valor pedido:

$$T=\frac{a(a+1)(a-1)+b(b+1)(b-1)+c(c+1)(c-1)}{a(bc+1)+b(ac+1)+c(ab+1)}$$

Efectuando en el numerador y denominador:

$$T=\frac{(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c)}{(3abc)+(a+b+c)}$$

Del dato: $a+b+c=0$; luego se cumple que: $a^3+b^3+c^3=3abc$

Finalmente en "T"

$$T=\frac{(3abc)-(0)}{(3abc)+(0)}=\frac{3abc}{3abc}$$ $\therefore$ $\boxed{T=1}$

PROBLEMA 85

Si: $a+b+c=3$ con $a\neq 0$; $b\neq 1$ $\wedge$ $c\neq 2$

Calcular el valor de: $\frac{a^3+(b-1)^3+(c-2)^3}{a(b-1)(c-2)}$



Resolución:

De la condición:

$$a+b+c=3 \quad \rightarrow \quad a+b+c=1+2 \quad \rightarrow \quad a+(b-1)+(c-2)=0$$

Luego se cumple que: $a^3+(b-1)^3+(c-2)^3=3a(b-1)(c-2)$

Sea "T" el valor pedido: $T=\dfrac{a^3+(b-1)^3+(c-2)^3}{a(b-1)(c-2)}$

Es decir: $T=\dfrac{3a(b-1)(c-2)}{a(b-1)(c-2)}$ $\quad \therefore$ $\boxed{T=3}$

PROBLEMA 86

Si se cumple: $x^2-3x+1=0$. Calcular el valor de: $\dfrac{x^7-x^5+x^3}{x^5}$

Resolución:

Sea "N" el valor pedido, es decir:

$$N=\frac{x^7-x^5+x^3}{x^5}=\frac{x^7}{x^5}-\frac{x^5}{x^5}-\frac{x^3}{x^5}$$

$$N=x^2-1+\frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad N=x^2+\frac{1}{x^2}-1 \qquad \text{....(I)}$$

De la condición: $x^2-3x+1=0 \quad \rightarrow \quad x^2+1=3x$

$$\frac{x^2+1}{x}=3 \quad \rightarrow \quad x+\frac{1}{x}=3$$

Elevando al cuadrado: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7$ $\qquad$ ....(II)

Finalmente reemplazando (II) en (I) se tendrá: $\quad \therefore$ $\boxed{N=6}$

PROBLEMA 87

Al reducir : $(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-4(a-b)^2+2(a+b+c)(a+b-c)$



Se obtiene:

Resolución:

Llamando "N" y escribiendo así a la expresión dada:

$$N = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)(a+b-c) + (a+b-c)^2 - 4(a-b)^2$$

$$N = [(a+b+c)+(a+b-c)]^2 - 4(a-b)^2$$

$$N = 4(a+b)^2 - 4(a-b)^2 = 4[(a+b)^2 - (a-b)^2]$$

Por Legendre: $N = 4[4(ab)]$

$$\therefore \quad \boxed{N = 16ab}$$

PROBLEMA 88

Efectuar: M + N, conociendo:

$$M = (2a+b+c)^3 + (a+2b+c)^3 - 6(a+b+c)^3$$

$$N = (a+b+2c)^3 - 3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Resolución:

Hagamos: $a + b + c = m$

Luego: $M + N = (m+a)^3 + (m+b)^3 - 6m^3 + (m+c)^3 - 3m(a^2+b^2+c^2)$

Efectuando y agrupando en el segundo miembro se tendrá:

$$M + N = a^3 + b^3 + c^3 - 3m^3 + 3m(a^2+b^2+c^2) + 3m^2\underbrace{(a+b+c)}_{m} - 3m(a^2+b^2+c^2)$$

$$M + N = a^3 + b^3 + c^3 - 3m^3 + 3m^2 .m$$

$$\therefore \quad \boxed{M + N = a^3 + b^3 + c^3}$$

PROBLEMA 89

Efectuar:

$$\left[\frac{\dfrac{2a+b}{2a-b} - \dfrac{2a-b}{2a+b}}{\dfrac{2a+b}{2a-b} + \dfrac{2a-b}{2a+b}}\right] \cdot \left[\frac{(2a+b)^2 - 4ab}{4}\right]$$

Resolución:

Efectuando en cada factor se tendrá:

$$K = \left[\frac{\dfrac{(2a+b)^2-(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)}}{\dfrac{(2a+b)^2+(2a-b)^2}{(2a-b)(2a+b)}}\right]\cdot\left[\frac{4a^2+b^2}{4}\right]$$

Aplicando Legendre y simplificando en el 1º factor

$$K = \left[\frac{8ab}{2(4a^2+b^2)}\right]\cdot\left[\frac{4a^2+b^2}{4}\right]$$

Finalmente el valor más simple será: $\therefore$ $K = ab$

PROBLEMA 90

Si: $x = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$

$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2$

Calcular: $N = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + ... + (x - a_n)^2$

Resolución:

Efectuando y agrupando convenientemente en el 2º miembro de "N":

$$N = nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$$

Por dato: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{nx}{2}$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2 = n$

Luego reemplazando:

$$N = nx^2 - 2x\left(\frac{nx}{2}\right) + n \quad \rightarrow \quad N = nx^2 - nx^2 + n$$

$\therefore$ $N = n$

PROBLEMA 91

Simplificar: $$\frac{(a+1)(a-1)(a^4+a^2+1)(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$$

Resolución:

Sea : $$T=\frac{\overbrace{(a+1)(a-1)}(a^4+a^2+1)(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$$

Por diferencia de cuadrados:

$$T=\frac{\overbrace{(a^2-1)(a^4+a^2+1)}(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}{a^9+1}$$

Por diferencia de cubos:

$$T=\frac{(a^6-1)\overbrace{(a^6-a^3+1)(a^6+a^3+1)}}{a^9+1}$$

Por equivalencia de Argan'd:

$$T=\frac{(a^6-1)(a^{12}+a^6+1)}{a^9+1}$$

Por diferencia de cubos:

$$T=\frac{a^{18}-1}{a^9+1}$$

Finalmente apliquemos diferencia de cuadrados en el numerador:

$$T=\frac{(a^9+1)(a^9-1)}{a^9+1} \qquad \therefore \quad \boxed{T=a^9-1}$$

PROBLEMA 92

Si: $\dfrac{ab}{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Proporcionar el valor de $\left(\dfrac{a}{b}\right)^8+\left(\dfrac{b}{a}\right)^8$

Resolución:

Del dato: $$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$



Es decir: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\sqrt{5}$

Elevando al cuadrado y efectuando: $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=3$

Elevando al cuadrado y efectuando: $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{a}\right)^4=7$

Elevando al cuadrado y efectuando: $\left(\frac{a}{b}\right)^8+\left(\frac{b}{a}\right)^8=47$

PROBLEMA 93

Hallar el valo numérico de: $\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{abc(ab+bc+ac)}$

Si: $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $b=\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{5}$; $c=\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

Resolución:

Sea "T" el valor pedido: $T=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{abc(ab+bc+ac)}$

Por dato $a+b+c=0$; luego se cumple que:

$$a^3+b^3+c^3=3abc \quad \wedge \quad a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$$

Finalmente: $T=\frac{(3abc)[-2(ab+bc+ac)]}{abc(ab+bc+ac)}$

$$\therefore \quad T=-6$$

PROBLEMA 94

Sabiendo que: $x=\sqrt[3]{1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}+\sqrt[3]{1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}}$. Calcular: $5x^3+3x+1$

Resolución:

Elevando al cubo el dato, según la equivalencia de Cauchy:

$$x^3 = 2 + 3\sqrt[3]{\left(1+\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)\left(1-\frac{3\sqrt{14}}{5\sqrt{5}}\right)} \cdot x$$

Aplicando diferencia de cuadrados en el radicando:

$$x^3 = 2 + 3x\sqrt[3]{1-\frac{126}{125}} \quad \Rightarrow \quad x^3 = 2 + 3x\sqrt[3]{-\frac{1}{125}} = 2 - \frac{3x}{5}$$

$$x^3 = 2 - \frac{3x}{5} \quad \Rightarrow \quad 5x^3 = 10 - 3x$$

$$5x^3 + 3x + 1 = 10 + 1 \quad \therefore \quad \boxed{5x^3 + 3x + 1 = 11}$$

PROBLEMA 95

Si: $x + 2 = 23\sqrt{2x}$. Calcular el valor de : $\quad N = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}}}{\sqrt[8]{2x}}$

Resolución:

De la condición: $\quad \sqrt{x}^2 + \sqrt{2}^2 = 23\sqrt{2x}$

Completando cuadrados: $\quad \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2} + \sqrt{2}^2 = 23\sqrt{2x} + 2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2}$

Extrayendo raíz cuadrada: $\quad (\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 = 25\sqrt{2x}$

$$\sqrt{x}+\sqrt{2} = 5\sqrt[4]{2x}$$

Extrayendo la raíz cuadrada: $\quad \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \sqrt{5}\,\sqrt[8]{2x}$

Finalmente reemplazando en "N":

$$N = \frac{\sqrt{5}\,\sqrt[8]{2x}}{\sqrt[8]{2x}} \quad \therefore \quad \boxed{N = \sqrt{5}}$$



PROBLEMA 96

Si: $a-b=b-c=\sqrt{3}$. Calcular el valor de: $\dfrac{a(a^2-bc)+b(b^2-ac)+c(c^2-ab)}{a+b+c}$

Resolución:

Sea "T" el valor pedido: $$T=\frac{a(a^2-bc)+b(b^2-ac)+c(c^2-ab)}{a+b+c}$$

Efectuando en el numerador: $$T=\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}$$

Según la equivalencia de Gauss. $$T=\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)}{a+b+c}$$

$$T=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$$

Completando cuadrados obtenemos:

$$T=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{2} \quad ...(I)$$

Por dato: $a-b=\sqrt{3}$; $b-c=\sqrt{3}$ Sumando: $a-c=2\sqrt{3}$

Ahora reemplazando en (I): $$T=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2}{2}=\frac{3+3+12}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{T=9}$$

PROBLEMA 97

Si: $F(x)\equiv\sqrt[6]{\dfrac{x^{10}+5x^5+1}{x^5}}$. Calcular: $F(2+\sqrt{3})$

Resolución:

Por dato: $$F(x)\equiv\sqrt[6]{x^5+\frac{1}{x^5}+5} \quad ....(I)$$

Hallemos: $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ Por condición: $x = 2+\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2-\sqrt{3}$$

Notar que: $x+\dfrac{1}{x}=4$ ....(II)

Elevando (II) al cuadrado: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=14$ ....(α)

Elevando (II) al cubo: $x^3+\dfrac{1}{x^3}=52$ ....(θ)

Multiplicando miembro a miembro (α) y (θ):

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=14.52 \quad \Rightarrow \quad x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=728$$

Como: $x+\dfrac{1}{x}=4$ Luego: $x^5+\dfrac{1}{x^5}=724$

Finalmente en (I): $F(2+\sqrt{3})=\sqrt[6]{724+5}=\sqrt[6]{729}$

$$\therefore \quad F(2+\sqrt{3})=3$$

PROBLEMA 98

Seabiendo que: $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac)$; $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$

Calcular: $N=\sqrt[3]{\dfrac{(a+b+c)^4}{a^4+b^4+c^4}}+\sqrt[5]{\dfrac{(a+b+c)^6}{a^6+b^6+c^6}}$

Resolución:

De la condición: $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac)$

Efectuando se obtiene: $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$

Por implicancia, se cumple: $a=b=c$

Finalmente el valor pedido será:

$$N = \sqrt[3]{\frac{(3a)^4}{3a^4}} + \sqrt[5]{\frac{(3a)^6}{3a^6}} \quad \Rightarrow \quad N = \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[5]{3^5}$$

$$\therefore \quad \boxed{N = 6}$$

PROBLEMA 99

Si: $\begin{cases} \dfrac{a^2 + b^2}{1 + c} = 1 - c \\ a + b = 3 - c \end{cases}$

Determine el valor numérico de: $N = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc - 3}$

Resolución

Por dato: $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad \wedge \quad a + b + c = 3$

Por la fórmula del trinomio al cubo:

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

Reemplazando datos: $27 = 9 - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc - 9 = 3(abc - 3) \qquad ....(\alpha)$$

Finalmente como se pide: $N = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{abc - 3}$

Reemplazando (α) se tendrá:

$$N = \frac{3(abc - 3)}{abc - 3} \qquad \therefore \quad \boxed{N = 3}$$

PROBLEMA 100

Si: $\begin{cases} x^2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(2x - 1) & ....(I) \\ a + b + c = 3 & ....(II) \end{cases}$

Donde: $x \neq \{1 ; 0 ; 1/2\}$

Calcular: $T=\dfrac{a^2+ab+b^2+c^2}{bc}$

Resolución:

De dato (I): $(ax)^2+(bx)^2+(cx)^2=2x(3)-3$

De (II): $a+b+c=3$

Luego: $(ax)^2+(bx)^2+(cx)^2=2x(a+b+c)-3$

$$(ax)^2-2(ax)+1+(bx)^2-2(bx)+1+(cx)^2-2(cx)+1=0$$

$$(ax-1)^2+(bx-1)^2+(cx-1)^2=0$$

Se cumple: $ax-1=0 \Rightarrow a=\dfrac{1}{x}$

$bx-1=0 \Rightarrow b=\dfrac{1}{x}$

$cx-1=0 \Rightarrow c=\dfrac{1}{x}$

Notar que: $a=b=c=\dfrac{1}{x}$

Finalmente el valor pedido será: $T=\dfrac{a^2+a^2+a^2+a^2}{a^2}=\dfrac{4a^2}{a^2}$

$\therefore$ $T=4$

PROBLEMA 101

Si se cumple: $a+\sqrt{ac}=b+\sqrt{bc}$; $a\neq b$. Calcular: $N=\dfrac{a}{\sqrt{bc}}+\dfrac{b}{\sqrt{ac}}+\dfrac{c}{\sqrt{ab}}$

Resolución:

Se pide: $N=\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}$ es decir: $N=\dfrac{\sqrt{a}^3+\sqrt{b}^3+\sqrt{c}^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}$ .....(I)

Por condición: $a+\sqrt{a}\sqrt{c}=b+\sqrt{b}\sqrt{c} \rightarrow a-b=\sqrt{b}\sqrt{c}-\sqrt{a}\sqrt{c}$

$$\sqrt{a}^2 - \sqrt{b}^2 = \sqrt{b}\sqrt{c} - \sqrt{a}\sqrt{c}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = -\sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

Simplificando: $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Se tiene:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = -\sqrt{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$$

Luego se cumple que:

$$\sqrt{a}^3 + \sqrt{b}^3 + \sqrt{c}^3 = 3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} \qquad \text{....(II)}$$

Finalmente (II) en (I): $N = \dfrac{3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}{\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}}$

$$\therefore \quad \boxed{N = 3}$$

PROBLEMA 102

Conociendo: $\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 4abc & \text{....(I)} \\ a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac + 1 & \text{....(II)} \end{cases}$

Calcular: $T = \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{a+c}{b} + \dfrac{b+c}{a} - ab - bc - ac$

Resolución:

Del dato (I): $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = abc$

Por la equivalencia de Gauss: $(a + b + c)\underbrace{(a^2 + b^2 + c^2} - ab - bc - ac) = abc$

Utilizando el dato (II) se consigue: $a + b + c = abc$ ....(α)

Se pide: $T = \dfrac{a+b}{c} + \dfrac{a+c}{b} + \dfrac{b+c}{a} - ab - bc - ac$

Sumando 3 a ambos miembros:

$$T + 3 = \frac{a+b}{c} + 1 + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{b+c}{a} + 1 - ab - bc - ac$$

$$T+3=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}-ab-bc-ac$$

De (α) $a+b+c=abc$, luego: $T+3=ab+ac+bc-ab-bc-ac$

$$T+3=0$$

$$\therefore \quad \boxed{T=-3}$$

PROBLEMA 103

Si $\{x\,;\,y\,;\,z\}\subset \mathbf{R}$ tal que: $x^2+y^2+z^2+14=2(x+2y+3z)$

Calcular el valor de: $\dfrac{(x+y+z)xyz}{x^3+y^3+z^3}$

Resolución:

Escribiendo todo en el primer miembro se obtiene:

$$x^2-2x+y^2-4y+z^2-6z+14=0$$

Dando forma:

$$x^2-2(x)(1)+(1)^2+y^2-2(y)(2)+(2)^2+z^2-2(z)(3)+(3)^2=0$$

Notar que: $(1)^2+(2)^2+(3)^3=14 \;\Rightarrow\; (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$

Se cumple: $x-1=0 \;\Rightarrow\; x=1$

$y-2=0 \;\Rightarrow\; y=2$

$z-3=0 \;\Rightarrow\; z=3$

Finalmente si "N" es el valor pedido, dicho valor equivale a:

$$N=\frac{(6)(6)}{36} \qquad \therefore \quad \boxed{N=1}$$

PROBLEMA 104

Si: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$. Determine el valor numérico de: $T=\dfrac{(a+b)^6-6(a^6+b^6)}{(ab)^3}$

Resolución:

Del dato se consigue:

$$(a+b)^2 = ab \quad \Rightarrow \quad a^2+b^2 = -ab \qquad ....(I)$$

Elevando (I) al cubo: $a^6+b^6+3(a^2b^2)(a^2+b^2) = -a^3b^3$

$$a^6+b^6+3(a^2b^2)(-ab) = -a^3b^3$$

$$a^6+b^6 = 2a^3b^3 \qquad ....(II)$$

Se pide:
$$T = \frac{[(a+b)^2]^3 - 6(a^6+b^6)}{(ab)^3}$$

Reemplazando (I) y (II):
$$T = \frac{[ab]^3 - 6(2a^3b^3)}{(ab)^3} = \frac{-11a^3b^3}{a^3b^3}$$

$$\therefore \boxed{T = -11}$$

PROBLEMA 105

Si se conoce:
$$\begin{cases} a+b+c = n \\ a^2+b^2+c^2 = n \\ a^3+b^3+c^3 = n \\ abc = n \end{cases}$$

Determine el valor de "n".

Resolución:

Hallemos: $ab+bc+ac$, para luego aplicar la equivalencia de Gauss:

Se sabe que: $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$

Reemplazando datos conseguimos:

$$ab+bc+ac = \frac{n^2-n}{2}$$

Por la equivalencia de Gauss:

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

Reemplazando datos:

$$n-3n = (n)\left(n - \frac{n^2-n}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad -2n = n\left(\frac{3n-n^2}{2}\right)$$

Transponiendo términos y factorizando tenemos:

$$n(n^2 - 3n - 4) = 0 \quad \rightarrow \quad n(n+1)(n-4) = 0$$

Finalmente, igualando a cero cada factor:

$$\therefore \quad \boxed{n = 0 \ \vee \ n = -1 \ \vee \ n = 4}$$

PROBLEMA 106

Si $a + b + c = 0$; halle el equivalente de: $\dfrac{a^9 + b^9 + c^9 + 3(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(a^3 + c^3)}{6(a^3 + b^3 + c^3) - 15abc}$

Resolución:

Por condición: $a + b + c = 0$, luego se cumple que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \qquad ....(I)$$

Elevando (I) al cubo se tiene:

$$a^9 + b^9 + c^9 + 3(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(a^3 + c^3) = 27a^3b^3c^3 \qquad ....(II)$$

Si "T" es el equivalente pedido:

$$T = \frac{a^9 + b^9 + c^9 + 3(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(a^3 + c^3)}{6(a^3 + b^3 + c^3) - 15abc}$$

Al reemplazar (I) y (II) se tendrá:

$$T = \frac{27a^3b^3c^3}{6(3abc) - 15abc} = \frac{27a^3b^3c^3}{3abc}$$

$$\therefore \quad \boxed{T = 9a^2b^2c^2}$$

PROBLEMA 107

Si se verifica:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 + c^3 = 2(a+b)(b+c)(a+c) & ....(I) \\ a + b + c = 1 & ....(II) \end{cases}$$

Calcular el valor de: $\dfrac{1 + 5abc}{ab + bc + ac}$



Resolución:

Elevando (II) al cubo: $a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(a + c) = 1$

Utilizando al dato (I) se consigue:

$$5(a + b)(b + c)(a + c) = 1 \quad ....(III)$$

De acuerdo a la equivalencia adicional, tenemos:

$$(a + b)(b + c)(a + c) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ac)$$

Sustituyendo (II): $(a + b)(b + c)(a + c) + abc = ab + bc + ac$

Multiplicando por 5 a ambos miembros:

$$5(a + b)(b + c)(a + c) + 5abc = 5(ab + bc + ac)$$

Sustituyendo (III): $1 + 5abc = 5(ab + bc + ac)$

Finalmente:

$$\frac{1+5abc}{ab+bc+ac} = 5$$

PROBLEMA 108

Si
$$\begin{cases} xy = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1 & ...(I) \\ x^2 + y^2 = \sqrt[3]{10} + 1 & ....(II) \end{cases}$$

Calcular el valor de: $N = (x + y)^4 - (x - y)^4$

Resolución:

Se pide: $N = [(x + y)^2]^2 - [(x - y)^2]^2$

Por diferencia de cuadrados:

$$N = [(x + y)^2 + (x - y)^2][(x + y)^2 - (x - y)^2]$$

Por la equivalencia de Legendre:

$$N = [2(x^2 + y^2)][4(xy)]$$

$$\rightarrow \quad N = 8(x^2 + y^2)(xy)$$

De los datos: $N = 8(\sqrt[3]{10} + 1)(\underbrace{\sqrt[3]{10}^2 - \sqrt[3]{10} + 1})$

La expresión señalada corresponde a una suma de cubos:

$$N = 8(\sqrt[3]{10}^3 + 1^3) = 8(10 + 1) \quad \therefore \quad N = 88$$

PROBLEMA 109

Siendo: $a=\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2} \quad \wedge \quad b=\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}$

Calcular el valor de: $N=2ab(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$

Resolución:

Se pide: $N=2ab(3a^2+b^2)(a^2+3b^2)$

Multiplicando por 2 a ambos miembros:

$$2N=[2a(a^2+3b^2)][2b(3a^2+b^2)] \qquad ....(I)$$

Dando uso de los binomios al cubo tenemos:

$$(a+b)^3+(a-b)^3=2a(a^2+3b^2) \quad \wedge \quad (a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2)$$

En (I) se tendrá:

$$2N=[(a+b)^3+(a-b)^3][(a+b)^3-(a-b)^3]$$

Por diferencia de cuadrados:

$$2N=(a+b)^6-(a-b)^6 \qquad ......(II)$$

Por dato:

$$\left.\begin{array}{l} a=\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{2} \\ \\ b=\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{2}\end{array}\right\} \begin{array}{l} a+b=\sqrt[3]{3} \\ \\ a-b=\sqrt[3]{2}\end{array}$$

Luego en (II) se tendrá: $2N=(\sqrt[3]{3})^6-(\sqrt[3]{3})^6=3^2-2^2=5$

$$\therefore \quad \boxed{N=5/2}$$

PROBLEMA 110

Si: $\{a\,;b\}\subset \mathbf{R}/a^2+b^2=4$. Encontrar el máximo valor de $a+b$

Resolución:

Por Legendre: $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

Es decir: $$(a+b)^2 = 2(a^2+b^2) - (a-b)^2$$

Como: $a^2 + b^2 = 4$, ahora se tendrá:

$$(a+b)^2 = 8 - (a-b)^2 \quad ....(I)$$

Por condición: $(a+b)$ debe ser máximo.

En consecuencia: $(a+b)^2$ también será máximo

De (I) podemos notar que si: $(a+b)^2$ es máximo, $(a-b)^2$ debe ser mínimo; es decir:

$$(a-b)^2_{\text{mínimo}} = 0$$

Finalmente en (I): $$(a+b)^2_{\text{máximo}} = 8$$

$$\therefore \quad (a+b)_{\text{máximo}} = 2\sqrt{2}$$

PROBLEMA 111

Si $\boldsymbol{x}$ verifca: $(x^2+7)^{x-8} = \left(\dfrac{1}{8x}\right)^{\frac{7}{x}}$. Calcular x^2+1

Resolución:

La ecuación propuesta es:

$$(x^2+7)^{x-8} = (8x)^{-\frac{7}{x}}$$

Elevando al exponente x:

$$(x^2+7)^{x^2-8x} = (8x)^{-7}$$

Dando una forma conveniente:

$$(x^2+7)^{(x^2+7)-(8x+7)} = (8x)^{(8x)-(8x+7)}$$

Ahora fácilmente reconocemos:

$$x^2+7 = 8x \iff x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$(x-7)(x-1) = 0 \iff x = 7 \lor x = 1$$

$$\therefore \quad x^2+1 = 50 \lor x^2+1 = 2$$

Problemas Propuestos



PROBLEMA 1

Reducir: $\underbrace{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}........\sqrt[3]{4}}_{15\ \text{factores}}+(-2^2)^5$

A) 0 B) 1 C) 16

D) 64 E) 1024

PROBLEMA 2

Efectuar: $(-2^3)^2-(-2^2)^3$

A) 2^4 B) 2^5 C) 2^6

D) 2^7 E) 2^8

PROBLEMA 3

Calcular: $(-2)^2(2^{-2})(-2)^{-2}+2^{-2}$

A) 1/4 B) 1/2 C) 0

D) 2 E) 4

PROBLEMA 4

Calcular: $8^{-\frac{4}{3}}\cdot 4^{\frac{5}{2}}\cdot 2^0\cdot\sqrt[3]{4^6}$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 32

PROBLEMA 5

Efectuar:

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 32^{-5^{-1}}\cdot\left(\frac{64}{9}\right)^{-2^{-1}}\cdot\sqrt{(-3)^2}$$

A) –9 B) 9 C) 3

D) –3 E) 1

PROBLEMA 6

Calcular: $\left[4^{-1}+5+\frac{7}{4}-2(6^0)\right]^{-2^{-1}}$

A) 1/3 B) $\sqrt{5}$ C) 3

D) $\sqrt{5}^{-1}$ E) 5



PROBLEMA 7

Calcular:

$$\left[0,5+\sqrt[4]{16}+3(2^{-1})-3(-5^{0})^{0}\right]^{4}$$

A) 0 B) 1 C) 16
D) 32 E) 64

PROBLEMA 8

Reducir: $(-4)^{-2}-(-2)^{-3}+(-2)^{-4}$

A) 0,25 B) 0,5 C) 1
D) 2 E) 4

PROBLEMA 9

Calcular: $\dfrac{(-0,2)^{-2}-(-0,5)^{-5}}{25^{0,5}+(-32)^{0,2}}$

A) 57 B) 31 C) 23
D) 19 E) 11

PROBLEMA 10

Reducir: $256^{8^{-3^{-1}}}-81^{4^{-2^{-1}}}$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

PROBLEMA 11

Simplificar: $\dfrac{2^{x+2}+2^{x-1}}{2^{x-2}+2^{x+1}}$; $x\in\mathbf{R}^{+}$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 4

PROBLEMA 12

Calcular: $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}{\sqrt[8]{8}}$

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 2
D) 4 E) 1

PROBLEMA 13

Simplificar: $\dfrac{\sqrt{8\sqrt[3]{8\sqrt[4]{8}}}}{\sqrt[4]{8\sqrt[3]{8\sqrt{2}}}}$

A) 0,25 B) 0,5 C) 1
D) 2 E) 3

PROBLEMA 14

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{4}{3}}}$$

A) 1 B) $\sqrt{12}$ C) $\sqrt{4/3}$
D) 4/3 E) 3/4

PROBLEMA 15

Efectuar: $\dfrac{\sqrt[4]{2\sqrt[5]{16}}}{\sqrt[5]{2\sqrt[4]{32}}}$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1
D) 1/5 E) 1/3

PROBLEMA 16

Calcular: $\dfrac{2^{16}\cdot 16^{2}}{8^{8}}+\dfrac{18^{3}.12^{6}}{36^{4}.9^{2}}$

A) 129 B) 257 C) 5/3
D) 255 E) 127

PROBLEMA 17

Efectuar: $(9\sqrt[m]{3^{m-12}}\sqrt[m]{27^{m+4}})^{1/3}$

A) 1/3 B) 1/9 C) 1
D) 3 E) 9

PROBLEMA 18

Proporcionar el equivalente de:

$$\sqrt[\frac{\sqrt{2}}{}]{\sqrt{2}^{\sqrt{32}}}\,.\,\sqrt[\frac{\sqrt{3}}{}]{\sqrt[3]{3}^{\sqrt{27}}}$$

A) 6 B) 12 C) 24
D) 36 E) 72

PROBLEMA 19

Calcular: $\left(\sqrt{2}^{\sqrt[4]{4}^{\sqrt[4]{4}}}\right)\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{(\sqrt[4]{4}-1)}$

A) 0,25 B) 2 C) 4
D) 0,5 E) 16

PROBLEMA 20

Calcular: $\left(\sqrt[\frac{2^{\sqrt{2}+1}}{}]{4^{\sqrt{2}^{\sqrt{8}}}}\right)^{2^{\sqrt{2}}}$

A) $\sqrt{8}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2^{0}
D) 2 E) 4

PROBLEMA 21

Si: $\dfrac{a^{x}(ab)^{2}}{a^{-4}b^{5}}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{3}$

Hallar el valor de: $\{(x+4)^{a}\}^{b}$

A) 3 B) 2^{0} C) 0
D) 3^{-3} E) NA

PROBLEMA 22

¿Qué afirmación es correcta?

I) $x^{0}=1$ es un teorema

II) $x^{a}\,.\,x^{b}=x^{a+b}$ es una definición.

III) $(-x)^{2}=x^{2}$ es una definición

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) Ninguna

PROBLEMA 23

Si:

$$x=\frac{9^{7}+9^{3}+81}{9^{5}+9+1}-8 \quad\wedge\quad y=\frac{7^{15}-7^{13}+7^{5}}{7^{14}+7^{4}-7^{12}}-6$$

Calcular: $\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n}\right\}^{200}$ Siendo: $n=2x^{y}+y$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 1 E) NA



PROBLEMA 24

Si: $\frac{(a^b)^{a+c}.(b^a)^{b-c}}{(b^a.a^{-b})^{-c}} = 4$

El valor de "ab" es:

A) $(1/2)^{-1}$ B) 4 C) 1/4
D) 4^{-2} E) 16

PROBLEMA 25

Si: $a \in \mathbf{Z} \wedge bc \in Q$, donde:

$$\frac{(ab)^a + (bc)^a + (ac)^a}{a^{-a} + b^{-a} + c^{-a}} = 9$$

¿Cuántos valores asume "a"?

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

PROBLEMA 26

Si: $$\frac{3(6^{m+1}) + 2^{3m+3}}{9(3^m) + 4(2^{2m})} = 32$$

Luego el valor de "m + 1" es:

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 5

PROBLEMA 27

Si: $x^a y^b = 5^b$
$x^b y^a = 5^a$

Calcular: xy^{-1}

A) 5 B) 5^a C) 5^{a-b}
D) 1/5 E) 1

PROBLEMA 28

¿Que afirmación es correcta?

I) $(x^a)^b = x^a . x^b$

II) $x^{a/b} = x^{a-b}$

III) $(xy^{-1})^a = x^a y^{-a}$

A) sólo I B) sólo II C) sólo III
D) I y II E) II y III

PROBLEMA 29

Si : $x^{x^x} = 2^2$

Calcular $x^{x^{x+x^x}}$

A) 2^4 B) 2^8 C) 2^2
D) 2^{12} E) 2^3

PROBLEMA 30

Si : $x^{x^3} = 3$ Calcular: x^{21}

A) 3^{21} B) 3^7 C) 3^3
D) 7 E) NA

PROBLEMA 31

Resolver: $8^{x^4} = 4^{24}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

PROBLEMA 32

Hallar "x": $3^{3^{x-3}} = 27^{9^{x+2}}$



A) 8 B) 6 C) –6
D) –8 E) –10

PROBLEMA 33

Resolver: $27^{9^{x-3}} = \sqrt[3]{3}$

A) 2 B) 4 C) –2
D) –4 E) –3

PROBLEMA 34

Hallar "b" del sistema:

$$\sqrt[a]{a+b} = 6 \qquad ....(1)$$

$$(a+b) \cdot 3^a = 5832 \qquad ....(2)$$

A) 123 B) 213 C) 125
D) 312 E) 36

PROBLEMA 35

Hallar "x" en:

$$\sqrt[7]{\frac{5^{16}+5^x}{5^x+5^2}} = 5$$

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 6

PROBLEMA 36

Resolver: $9^{x+2} = 9^x + 240$

A) 2 B) –2 C) 1/2
D) 1/4 E) 1

PROBLEMA 37

Hallar "x" en: $(ax)^x = a^{a^a}$

A) a^{a-1} B) a^{a+1} C) a
D) a^a E) $\sqrt[a]{a}$

PROBLEMA 38

Resolver: $32^{25^{x-1}} = \sqrt[5]{2}^{\sqrt[3]{5}^{x+3}}$

A) 0,4 B) 0,5 C) 0,6
D) 0,8 E) 0,35

PROBLEMA 39

Calcular: $x^{24} + x^{12} + 1$; si:

$$x^{x^{12}} = \sqrt[6]{2}$$

A) 7 B) 9 C) 15
D) 12 E) 15

PROBLEMA 40

Resolver: $x^{x^x} = 2^{-\sqrt{2}}$

A) 1/2 B) 1/4 C) 1/8
D) $1/\sqrt{2}$ E) NA

PROBLEMA 41

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[2x+3]{\frac{(225)^{2x+4}}{5^{2x+5}.4+(25)^{x+3}}}$$



A) 45 B) 15 C) 25
D) 35 E) 65

PROBLEMA 42

Calcular: $$\sqrt[\sqrt[\sqrt[4]{4}]{4}]{\sqrt[4]{16^{\sqrt[4]{4^{\sqrt[4]{64}}}}}}$$

A) $\sqrt[4]{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) 4 E) 8

PROBLEMA 43

Simplificar:

$$\frac{2.\sqrt[7^x-7]{x^{2-7^x}}-x^2.\sqrt[7^x-7]{x^{14}}}{\sqrt[7^x-7]{x^{7^x+7}}}$$

A) x B) $2x$ C) $3x$
D) $4x$ E) 1

PROBLEMA 44

Simplificar :

$$\sqrt[m-n]{\frac{(3^{2n}+18^{n-m})(2^{2n}-10^{n-m})}{(6^{n-m}+3^{m+n})(2^{m+n}-5^{n-m})}}$$

A) 2^{-1} B) 3^{-1} C) 6^{-1}
D) 8^{-1} E) 12^{-1}

PROBLEMA 45

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[a-b]{\frac{2^{a+b}\cdot 3^{a}+2^{b}\cdot 3^{a+b}}{2^{2a}\cdot 3^{b}+2^{a}\cdot 3^{2b}}}$$

A) 1/2 B) 3/2 C) 5/2
D) 7/2 E) 9/2

PROBLEMA 46

Calcular:

$$\left(\sqrt[3^{\sqrt[3]{3^3}}]{3^{\sqrt[3]{3}}}\cdot 3^{\sqrt[3]{3^{-7}}}\right)^{\frac{3}{\sqrt[9]{9}}}$$

A) 3 B) 9 C) 27
D) 81 E) $\sqrt[3]{9}$

PROBLEMA 47

Simplificar:

$$\left(\sqrt[9^{a^2}]{2^{3^{4a^2}}}\cdot 2^{6^{2a^2}}\right)^{\frac{3^{-2a^2}}{1+2^{2a^2}}}$$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 4
D) $\sqrt[3]{2}$ E) 8

PROBLEMA 48

Simplifiquese:

$$\sqrt[x]{x^{x}\cdot\sqrt[x]{x^{x^2}\cdot\sqrt[x]{x^{x^3}\ldots\ldots\ldots\sqrt[x]{x^{x^x}}}}}$$

A) x B) x^x C) x^{x+1}
D) x^{x^x} E) F.D

PROBLEMA 49

Determinar: $\sqrt[3]{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{2}\ldots\ldots\ldots}}}$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[4]{2}$ C) $\sqrt{8}$

D) $\sqrt[4]{8}$ E) $\sqrt[4]{32}$

PROBLEMA 50

Efectuar:

$$\sqrt[81^{3^x}]{\left(\sqrt[3]{512^{3^{3^{x+1}}}}\right)^{3^{3^x}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 32

PROBLEMA 51

Calcular:

$$\sqrt[x-y]{(x-y)^{y-x}}+\sqrt[y-x]{(y-x)^{x-y}}$$

A) x B) y C) $2x$

D) $-2y$ E) 0

PROBLEMA 52

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[\sqrt[x]{x}]{\left(\sqrt[x]{x^{\sqrt[x]{x}}}\right)^{x}}}{\left(x^{-\sqrt[x]{x}}\right)^{-\sqrt[x]{x}}}$$

A) x B) x^2 C) x^4

D) x^x E) $\sqrt[x]{x}$

PROBLEMA 53

Simplificar:

$$\frac{3^{a^b+4}-2\cdot 3^{a^b+3}+4\cdot 3^{a^b+1}}{5\cdot 3^{a^b+1}-2\cdot 3^{a^b}}$$

A) 1 B) 3 C) 6

D) 2 E) 7

PROBLEMA 54

Simplificar:

$$\frac{9^{2^{-1}}+36^{2^{-1}}+125^{3^{-1}}}{4^{2^{-1}}}$$

A) 2 B) 4 C) 5

D) 7 E) 1/2

PROBLEMA 55

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[1-a]{\frac{x^{1-a}-y^{1-a}}{y^{a-1}-x^{a-1}}}$$

A) x B) y C) xy

D) x/y E) y/x

PROBLEMA 56

Simplificar:

$$\left(\frac{\sqrt[xy]{\frac{x^y+y^x}{x^{-y}+y^{-x}}}+1}{\sqrt[xy]{\frac{x^{-y}-y^{-x}}{x^y+y^x}}+1}\right)^{xy}$$

A) xy B) x^xy^y C) x^yy^x
D) 1 E) $(xy)^{x+y}$

PROBLEMA 57

Efectuar: $$\left(\sqrt[\sqrt[12]{6^6}]{6^{\sqrt[6]{1296}}}\cdot 6^{-\sqrt[6]{6^5}}\right)^{\frac{6}{\sqrt[6]{6}}}$$

A) 6^3 B) 6^5 C) 6^4
D) 6^6 E) 6^7

PROBLEMA 58

Simplificar:

$$\sqrt[30]{\frac{\sqrt[5]{x^2}\,.\sqrt[5]{x^2}\,\text{.........50 fact}}{\sqrt{x^5}\,.\sqrt{x^5}\,\text{.........20 fact}}}$$

A) x B) x^{-1} C) x^{-2}
D) x^{-3} E) x^2

PROBLEMA 59

Efectuar: $$\left\{(x^x)^{(x^x)^2}\right\}^{x^{-1-2x}}$$

A) 1 B) x^{-1} C) x
D) x^2 E) x^{-2}

PROBLEMA 60

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[(a+1)^{-1}]{\sqrt[(a+2)^{-1}]{\sqrt[(a+3)^{-1}]{\sqrt[(a+4)^{-1}]{a}}}}}{\sqrt[(a^2+5a+5)^{-2}]{a}}$$

A) 1 B) a C) a^{-1}
D) a^2 E) a^3

PROBLEMA 61

Simplifíquese:

$$\frac{\{x^{-x}[x^{-x}(x^x)^x]^{-x}\}^x}{[x^{-1}(x^{1-x})^x]\,x^2}$$

A) 1 B) x C) x^2
D) x^3 E) x^x

PROBLEMA 62

Calcular:

$$\sqrt[\sqrt{5}]{\sqrt[5-\sqrt{20}]{3^{-2\sqrt{5}}\,.\sqrt[5]{\sqrt[5-2\sqrt{5}]{3^{25}}}}\,.3^{\sqrt{5}-1}}$$

A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) $\sqrt[5]{3}$

PROBLEMA 63

Efectuar:

$$\sqrt[5\sqrt[3]{5^5}]{2^{\sqrt[5]{5}}}\;.\,2^{-\sqrt[25]{5^{21}}}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) NA

PROBLEMA 64

Si : $x^x = 3$

Calcular: $x^{x^{x+1}}$

A) 270 B) 9 C) 6

D) 27 E) 3

PROBLEMA 65

Marcar (V) o (F)

I) El exponente de a^a en a^{a^3} es 3:

II) $a^{-1}=\frac{1}{a}$; $\forall a \in \mathbf{R}$

III) $(a+b)^n=a^n+b^n$

A) FFF B) FVF C) VFF

D) FVV E) VVV

PROBLEMA 66

Mostrar el equivalente de:

$$\left(\sqrt[\sqrt{x}\sqrt{x}]{\sqrt[x^{\sqrt{x}}]{\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}^{\sqrt{x}(1+x)}}}}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}$$

A) x^5 B) x^4 C) x^3

D) x^2 E) x

PROBLEMA 67

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[2^x-2]{2^{2^{x+1}}}+2^2\,\sqrt[2^x-2]{2^4}}{\sqrt[2^x-2]{2^{2^x+2}}}$$

A) 2 B) 4 C) 5

D) 6 E) $\sqrt[x]{4}$

PROBLEMA 68

Calcular:

$$\sqrt[\sqrt{5^{\sqrt{5^{\sqrt{5}}}}}]{\sqrt[\sqrt{5^{\sqrt{5}}}]{5^{\sqrt{5^{\sqrt{5^{\sqrt{5}}}}}+\sqrt{5}}}}$$

A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) $\sqrt[5]{5}$

D) $5\sqrt{5}$ E) 5^5

PROBLEMA 69

El equivalente de:

$$\sqrt[\frac{1}{2}]{x^{\frac{1}{2}}}\ .\ \sqrt[\frac{1}{2}]{x^{\frac{1}{2}}}\text{..............n radiales}$$

Muestra a "x" con exponente:

A) 2^n B) 2^{n-1} C) 2^n-1

D) 2^{n+1} E) $2^{2n}-1$

PROBLEMA 70

Calcular:

$$\left\{\sqrt[9]{9}^{\sqrt[9]{81}}\left(\sqrt[-9]{9}^{1-\sqrt[9]{9}}\right)^{\frac{9}{\sqrt[9]{9^7}}}\right\}^{\frac{\sqrt[3]{81}}{2}}$$

A) 9 B) 3 C) $\sqrt[3]{3}$

D) $\sqrt[9]{3}$ E) 27

PROBLEMA 71

Simplificar:

$$\sqrt[2y]{\frac{(2^y)^{x-2}\cdot(y^2)^{y-x}}{(2^{-y}\cdot y^2)^{-x}}}$$



A) y B) y/4 C) y/2
D) y^2 E) y^4

PROBLEMA 72

Efectuar:

$$\left(\sqrt[1-y^{-1}]{(y^{y-2})^{y^2-1}}\right)^{\frac{y}{y+1}}$$

A) y^{-2} B) y^{-1} C) 1
D) y E) y^2

PROBLEMA 73

Mostrar el equivalente de:

$$\left\{\left(\frac{a^a}{x^x}\right)\cdot\sqrt{\frac{a^x\cdot x^a}{a^a\cdot x^x}\cdot\left(\frac{a}{x}\right)^{a-x}\cdot\sqrt[2^{-1}]{\frac{a^x}{x^a}}}\right\}^{(a+x)^{-1}}$$

A) a/x B) ax C) x/a
D) $1/ax$ E) 1

PROBLEMA 74

Calcular:

$$\left(\sqrt[2^{2x^2}]{5^{2^{4x^2}}}\cdot 5^{100^{x^2}}\right)^{\frac{4^{-x^2}}{1+5^{2x^2}}}$$

A) 5 B) 25 C) $\sqrt{5}$
D) 125 E) $\sqrt[5]{5}$

PROBLEMA 75

Calcular: $\sqrt[4^{-4}]{4^{-4}\cdot\sqrt[-4]{(4^{-4})\cdot 4^{-16}}}$

A) 4^{128} B) 4^{16} C) 4^{64}
D) 4^{512} E) 4^{256}

PROBLEMA 76

Simplificar: $\sqrt[c-a]{\frac{a^{a-b}+a^{b-c}}{a^{b-a}+a^{c-b}}}$

A) 1 B) a^{-1} C) a
D) a^{-2} E) a^2

PROBLEMA 77

Si: $M = 2^{x+2} \wedge N = 3^{y+3}$
Donde: $2^x = 3^y = 31$

Halle la suma de cifras de: M + N

A) 6 B) 5 C) 16
D) 9 E) NA

PROBLEMA 78

Simplificar:

$$\sqrt[b^2-a^2]{\frac{a^{2a^2}+a^{a^2+b^2}}{a^{2b^2}+a^{a^2+b^2}}}$$

A) a^{-1} B) a C) a^b
D) a^a E) a^{a+b}

PROBLEMA 79

Mostrar el equivalente de:

$$\sqrt[(1+a^{a+1})^2]{a\{a^a[a(a^a)^{a^a}]^a\}^{a^a}}$$

A) a B) $\sqrt[a]{a}$ C) a^a
D) a^{a+1} E) a^{1+a^a}

PROBLEMA 80

Calcular:

$$\frac{\sqrt[a-1]{6^{a-1}-1}}{\sqrt[a-1]{2^{a-1}-3^{-(a-1)}}-\sqrt[a-1]{3^{a-1}-2^{-(a-1)}}}$$

A) 6 B) –6 C) 1/6
D) –1/6 E) N.A

PROBLEMA 81

Simplificar:

$$\sqrt[-(a-1)]{\frac{a^{1-a}+(a-1)^{1-a}}{a^{a-1}+(a-1)^{a-1}}}$$

A) a^2+a B) $a-1$ C) a
D) $a+1$ E) a^2-a

PROBLEMA 82

Calcular:

$$\left(\sqrt[625^{5^a}]{\sqrt[5]{32^{125^{5^a}}}}\right)^{5^{5^a}}$$

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 64

PROBLEMA 83

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[\sqrt{3^{-1}}]{\sqrt[3]{5}^{\sqrt{3}(a-b)}}\cdot\left[\sqrt[\frac{1}{b}]{\sqrt[3]{5}^{\sqrt{3}}}\right]^{\sqrt{3}-a}}{\sqrt[-\sqrt{3}]{\sqrt[3]{5}^{3ab}}\cdot\left[\sqrt[\frac{1}{b}]{\sqrt[3]{5}^{\frac{\sqrt{3}}{b}}}\right]^{\sqrt{3}\,a}\cdot 5^{-1}}$$

A) 1 B) 5 C) 5^{-1}
D) 25 E) $\sqrt[3]{5}$

PROBLEMA 84

Simplificar:

$$\frac{7^{\sqrt[\sqrt{5}]{9}}\cdot\sqrt[\sqrt[\sqrt{5}]{9}]{5^{-1}}\left[\sqrt[\sqrt[\sqrt{5}]{9}]{2}\right]^{\sqrt[\sqrt{5}]{81}-1}}{\sqrt[\sqrt[\sqrt{5}]{3^2}]{\frac{1}{10}\cdot 14^3}\cdot\sqrt[5+2\sqrt{5}]{3^{-1}}}$$

A) 7 B) 5 C) 7/5
D) 5/7 E) 1

PROBLEMA 85

Simplificar:

$$\sqrt[a^b-b^a]{\frac{a^{a^b-b^a}+5^{a^b-b^a}+6^{a^b-b^a}}{15^{b^a-a^b}+12^{b^a-a^b}+10^{b^a-a^b}}}$$

A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75



PROBLEMA 86

Efectuar:

$$\left(\sqrt[3a]{\sqrt[2a]{a^3}}\cdot\sqrt[6a]{\sqrt[a]{a}}\cdot\sqrt[a/3]{\sqrt[18a]{a^9}}\cdot\sqrt[a/2]{\sqrt[12a]{a^5}}\right)^{\frac{a^2}{3}}$$

A) a B) $\sqrt{a}$ C) $\sqrt[3]{a}$

D) $\sqrt[6]{a}$ E) a^a

PROBLEMA 87

Si: $x^x y^y = (xy)^n$; $x \neq y$

Calcular: $(xy)^{2n}$, donde:

$$\frac{x^{-x}+y^{-y}}{x^x+y^y}=3^2$$

A) 1/27 B) 1/64 C) 1/81

D) 1/16 E) 1/4

PROBLEMA 88

Efectuar:

$$\left(\sqrt[\sqrt5]{\sqrt[\sqrt5]{\sqrt[\sqrt5]{3125}}}\right)^{\sqrt[10]{5}^{2\sqrt5-5}}$$

A) $\sqrt{5}$ B) 5 C) $\sqrt[5]{5}$

D) $\sqrt[\sqrt5]{5}$ E) 25

PROBLEMA 89

Calcular: $\dfrac{5^{b+1}-25.5^b+5^{b+3}}{25.5^b-5^{b+1}}$

A) 5 B) 11,5 C) 5,25

D) 10 E) 5,5

PROBLEMA 90

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[\sqrt[x]{x}]{\left(\sqrt[x]{x}^{\sqrt[x]{x}}\right)^{x}}}{\left(x^{-\sqrt[x]{x}}\right)^{-\sqrt[x]{x}}}$$

A) x B) x^2 C) $\sqrt[x]{x}$

D) x^x E) NA

PROBLEMA 91

Efectuar:

$$\left(\sqrt[2^{\sqrt2-1}]{2\sqrt[\sqrt2]{2^{-\sqrt8}}}\right)^{2^{\sqrt2}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[\sqrt2]{2}$ C) 2

D) 4 E) $\sqrt[4]{2}$

PROBLEMA 92

Simplificar:

$$\sqrt[\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}}]{\sqrt[\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}]{\sqrt[\sqrt[3]{3}]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}}}$$

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) 3

D) 9 E) 27

PROBLEMA 93

Si: $$\frac{x^2(15^{x-8}\cdot 15^{x+9})}{15^{2x}\cdot x}=30$$

Calcular: x^{2x}

A) 4^8 B) 4 C) 3^6

D) 64 E) 16

PROBLEMA 94

Mostrar el equivalente de:

$$\left[\sqrt[\sqrt[\sqrt[3]{4}]{\sqrt[3]{4}}]{\left(\frac{\sqrt{4^{\sqrt{2}}}}{\sqrt[2]{4^{\sqrt[\sqrt{2}]{2^{-\sqrt{8}}}}}}\right)^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{3}}}}\right]^{\sqrt[5\sqrt[3]{4}]{(2\sqrt[3]{4})^2}}$$

A) 1/2 B) 4 C) 1/4

D) 2 E) NA

PROBLEMA 95

Si se cumple:

$\sqrt[x]{y}\cdot\sqrt[y]{x}=3^{-\sqrt{3}}$. Entonces un valor de:

x^2+2y^2 es:

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

PROBLEMA 96

Simplificar: $\sqrt[A]{B}$, donde:

$$A=8^{9^{-8^{-9^{-8^{-9^{-8^{-9^{-8^{-9^{-2^{-1}}}}}}}}}}}\quad\wedge\quad B=512^{81^{-64^{-36^{-32^{-25^{-16^{-16^{-8^{-9^{-2^{-1}}}}}}}}}}}$$

A) 2 B) 1/2 C) 4

D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt[4]{2}$

PROBLEMA 97

Simplificar:

$$\frac{\sqrt[5]{x^4\sqrt[5]{x^4\sqrt[5]{x^4\cdots\cdots}}}}{\sqrt{\dfrac{x^3}{\sqrt{\dfrac{x^3}{\sqrt{\dfrac{x^3}{\vdots}}}}}}+\sqrt[6]{\dfrac{x^7}{\sqrt[6]{\dfrac{x^7}{\sqrt[6]{\dfrac{x^7}{\vdots}}}}}}}$$

A) 1

B) 2

C) 1/2

D) 1/4

E) 1/6

PROBLEMA 98

Simplificar:

$$\left(\frac{\sqrt[a+1]{\sqrt[a]{x^{2a+1}}}\cdot\sqrt[a-1]{\sqrt[a-2]{x^{2a-3}}}\cdots\cdots\sqrt[3]{\sqrt{x^5}}}{\sqrt[a]{\sqrt[a-1]{x^{2a-1}}}\cdot\sqrt[a-2]{\sqrt[a-3]{x^{2a-5}}}\cdots\cdots\sqrt{x^3}}\right)^{1+a^{-1}}$$

A) x B) x^{-1} C) x^2

D) x^{-2} E) NA

PROBLEMA 99

Calcular:

$$\left\{\sqrt[9^{\sqrt[4]{2}}]{\left[\sqrt[3^{\sqrt[4]{2}}]{(3\sqrt[3]{2})^{9^{2^{-1}}}}\right]^{3\sqrt{\frac{2}{9}}}}\right\}^{\left(\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right)^{\sqrt{2}-9\sqrt[4]{2}}}$$

A) 27 B) $3^{\sqrt{2}}$ C) 54

D) $3^{\sqrt{6}}$ E) 6

PROBLEMA 100

Calcular:

$$\left(\sqrt[\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}}]{\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^{3^{\sqrt[3]{3}}-1}}}\right)^{9\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}-3^{\sqrt[3]{3}}+1}}$$

A) 27 B) $\sqrt[3]{3}^{7}$ C) 3

D) $\sqrt[9]{3}$ E) NA

PROBLEMA 101

Resolver: $x^{x^{\frac{1}{125}}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{5}}$

A) 5^{-25} B) 5^{-125} C) 5^{-625}

D) 5^{-1225} E) 5^{-3125}

PROBLEMA 102

Hallar "x": $\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{\sqrt[3]{x}^{5}}}}=5$

A) $\sqrt[5]{5}$ B) $\sqrt[5]{25}$ C) $\sqrt[5]{125}$

D) $\sqrt[5]{3125}$ E) NA

PROBLEMA 103

Indicar el exponente final de "x" al reducir:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\vdots}}{x^{-7}}}}{x^{-4}}\Big/ x^{-2}}$$

A) 5

B) –5

C) 6

D) –6

E) 2

PROBLEMA 104

Hallar "n" a partir de:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}{x^{-4}}}}{x^{-3}}}}{x^{-2}}}}{x^{-1}}}\ \text{n radicales}=\sqrt[2^{1997}]{x}^{\,2^{1998}-1999}$$

A) 1995 B) 1996 C) 1997

D) 1998 E) 1999

PROBLEMA 105

Calcular el valor de "n" para que la expresión:

$$\sqrt{x\div\sqrt{x\div\sqrt{x\div\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{n}}}}\ \text{radicales}$$

Se reduzca a: $\sqrt[32]{x^{11}}$

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA 106

Si el siguiente producto:

$$x\,.\,\sqrt[5]{x^{4}}\ .\ \sqrt[25]{x^{7}}\ldots\ldots\ \text{"n" factores}$$

Se reduce a la unidad ¿Qué valor adquiere la expresión: $12n/(5^{n}-1)$?

A) 7 B) 5 C) 4

D) 3 E) 9

PROBLEMA 107

Si: $\sqrt[x^{\sqrt{1/2}}]{x} = 2^{-1}$ Calcular:

$$E = \sqrt[\sqrt{x}-1]{x^{\sqrt{2x}} \div \sqrt[\sqrt{x}-1]{x^{\sqrt{2x}} \ldots\ldots}}$$

A) 2 B) 1/4 C) 4

D) 1/2 E) 1/8

PROBLEMA 108

Calcular:

$E = 3 + 7x^{-x} + 11x^{-2x} + 15x^{-3x} + \ldots\ldots$

Apartir de:

$$(x+5)^x = 23x + 1 + \sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\sqrt[x]{x\ldots\ldots}}}$$

A) 32/9 B) 51/7 C) 53/7

D) 52/9 E) 61/9

PROBLEMA 109

Si: $x^x = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

Calcular: "$2^x + x^2$"

A) 4 B) 2 C) 8

D) 16 E) 32

PROBLEMA 110

Reconocer cuántas son expresiones algebraicas:

$P(x) \equiv 2x^4 - 3x^{-1} + 5x - \sqrt[x]{2}$

$Q(x) \equiv \sqrt[3]{x} + 2x + 1$

$H(x) \equiv 2^x - 4x - 6$

$R(x) \equiv \pi - \sqrt{3}x$

$T(x) \equiv 1 + x + x^2 + \ldots.$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 111

Calcular la suma de los términos semejantes dados.

$$(a^2-1)x^{b-1}y \sim (b+1)x^4y^{1-a}$$

A) $5xy^4$ B) $5x^4y$ C) $2x^4y$

D) $-5x^4y$ E) $-2x^4y$

PROBLEMA 112

La suma de los valores de "n" que hacen de la expresión:

$$P(x\,;\,y) \equiv x^{n-1} + 4x^ny - y^{3-n}$$

un polinomio es:

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA 113

Reconocer a un polinomio:

A) $x^2 - 2x + 1$ B) $5x$ C) -2

D) $x^{-4} + x - 3$ E) Más de una es correcta

PROBLEMA 114

Para que valor de m + n el polinomio:

$P(x\,;\,y) \equiv x^{m-1} + x^2y + xy^{n+1}$ es homogéneo.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 3

PROBLEMA 115

Calcular a . b . c sabiendo que el polinomio

$P(x) \equiv x^{a-2} + x^{b-a-1} + x^{c-b-3}$

es completo y ordenado en forma creciente.

A) 48 B) 72 C) 216
D) 22 E) $B \vee C$

PROBLEMA 116

Si $P(x) \equiv 0$, calcular a + b + c

$P(x) \equiv (a-1)x^2 - (b-a-2)x + c - 4$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA 117

Calcular a.b si se verifica:

$(2a-3)x + 5 \equiv 7x + b - 1 \; ; \forall x \in \mathbf{R}$

A) 24 B) 28 C) 30
D) 32 E) 36

PROBLEMA 118

Si sumamos la suma de coeficientes de todos los polinomios de la forma:

$P(x\,;\,y) \equiv x^{n-2} + nx^2y^n + y^{4-n}$

obtenemos:

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) NA.

PROBLEMA 119

Columna A. El grado de P donde:

$P(x\,;\,y) \equiv x^2 + x^3y + xy^2 - 4$

Columna B GR(x) + GA – GR(y), en:

$P(x\,;\,y) \equiv x^4 + 3x^2y^3 + xy + y^2$

A) A es mayor que B
B) A es menor que B
C) A es igual que B
D) ¡No utilizar esta opción!
E) No se puede determinar.

PROBLEMA 120

Si el $P(x) \equiv x^{n-2} + x^2 - 5x + 4$

Es de quinto grado, determinar el grado de M, donde:

$M(x) \equiv (x+1)(x+2)(x+3)$............"n" factores

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PROBLEMA 121

Calcular la suma entre la suma de coeficientes y el término independiente del siguiente polinomio

$P(x) \equiv (2x-1)^2(4x+1)(x+1) + 3$

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

PROBLEMA 122

Calcular la suma de los coeficientes del polinomio P(x) a partir de:

$P(x-3) \equiv x^2 + (x+1)(x-5)x + 1$

A) –10 B) 10 C) 8
D) –8 E) –3

PROBLEMA 123

Calcular el término independiente del siguiente polinomio lineal mónico.

$P(x) \equiv (a-3)x^2 + (4-b)x + ab$

A) 6 B) –6 C) 9
D) –9 E) 12

PROBLEMA 124

Si: $P(x) \equiv 3x^{2m+n}$

$Q(x) \equiv -5x^{m+5}$

$R(x) \equiv 4x^8$

Son términos semejantes. Calcular: mn

A) 15 B) 10 C) 4
D) 6 E) 12

PROBLEMA 125

Si la expresión en variables x:

$mx^{m-1} - nx^{n-2} + mnx^3$

Se reduce a un solo término. Determine el coeficiente de dicho término:

A) 22 B) 18 C) 21
D) 20 E) 19

PROBLEMA 126

Si $P(x) \equiv x^2 + x + 1$, indicar verdadero (V) o falso (F)

I) $P(-1) = 3$

II) $P(a+1) = a^2 + 3a + 3$

III) $P(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 3$

A) VVV B) FFF C) VFV
D) FVF E) FVV

PROBLEMA 127

Si: $P(x) \equiv 1 + 2 + 3 + 4 + ... + x$

Calcular: $\dfrac{P(2010)}{2011}$

A) 2010 B) 2011 C) 1005
D) $\dfrac{1}{1005}$ E) 2009

PROBLEMA 128

Calcular: P(F(G(2))), sabiendo que:

$P(x) \equiv x^2 + x - 1$

$F(x) \equiv x^2 - x + 2$

$G(x) \equiv x^2 - x - 1$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 129

Dado el polinomio $P(x-2) \equiv x^2 - 4x - 3$

Columna A

La suma de coeficientes de $P(x)$

Columna B

El término independiente de x en $P(x)$

A) A es mayor que B

B) A es menor que B

C) A es igual que B

D) ¡No utilizar ésta opción!

E) No se puede determinar

PROBLEMA 130

Calcular "n" para que el término independiente de "x" en el polinomio:

$P(x) \equiv (x+n)(5x+2)^2 - 3$ sea 25

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA 131

A continuación se muestra un polinomio mónico cuya suma de coeficientes es 12:

$P(x) \equiv (3a - 2b)x + a + 2b$. Calcular: a^b

A) 9 B) 32 C) 64

D) 81 E) 27

PROBLEMA 132

$P(x)$ es un polinomio tal que: $P(0) = 7$ y $P(1) = 18$. Calcular la suma de los coeficientes de todos los términos que contienen a su variable.

A) 25 B) 11 C) 24

D) 12 E) 18

PROBLEMA 133

Determine el coeficiente del siguiente monomio de grado: $2n - 1$

$M(x) \equiv ((n-1)\,x)^n \cdot \sqrt[5]{(nx)^{3n}} \cdot \sqrt[3]{(nx)^n}$

A) 12 B) 24 C) 36

D) 64 E) 72

PROBLEMA 134

Dado el polinomio:

$P(x\,;\,y\,;\,z) \equiv 3x^{7-2n} + 2y^{3n-6} + z^{n-m}$

Calcular: m + n, sabiendo que $m > 1$; n es impar y $m \neq n$

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA 135

Si: $F(x+1) = F(x) + F(x-1)$

$4G(x) = F(x) - xG(x)$

$F(2) + 1 = F(1) = 4$

Calcular: $G(F(3))$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 8

PROBLEMA 136

Si:

$P(x; y; z) \equiv mx^{m^8} + ny^{m^n} - mnz^{2m^4+n}$ es homogéneo. Calcular m^2n.

A) 18 B) 24 C) 8

D) 10 E) 16

PROBLEMA 137

Si el polinomio:

$P(x) \equiv (4a+2)x^{2a-30} + (4a)x^{2a-29} + (4a-2)x^{2a-28} + \ldots\ldots + \Delta$

es completo y ordenado. ¿Cuál es su grado?

A) 30 B) 31 C) 32

D) 33 E) 29

PROBLEMA 138

Para qué valor de "k" los polinomios primitivos:

$$P(x) \equiv Kx - 5$$
$$G(x) \equiv 3x + K$$

verifican: $P(G(x)) - G(P(x)) = 30$

A) –4 B) –7 C) 2
D) 1 E) 5 ó –4

PROBLEMA 139

Calcular el término independiente del siguiente polinomio mónico cuadrático.

$$P(x) \equiv (b-2)x^3 + (a+2)x^2 + bx - ab$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 140

Si: $P(x) \equiv 3x^{2a-1}$, es una constante monómica. ¿Qué valor asume: a^2?

A) 1/2 B) 4 C) 2
D) 1/4 E) F.D.

PROBLEMA 141

Halle "a" si el equivalente de:

$M(x) \equiv \sqrt{3}\, x^6 \sqrt[5]{21x^4 \sqrt[3]{x^a \sqrt{2x^a}}}$ es un término de grado : 8

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

PROBLEMA 142

El grado de: $\left[\dfrac{\sqrt[3]{H(x)} \cdot P(x)}{Q^2(x)}\right]^n$ es 3n.

El grado de $\left[\dfrac{P(x).Q(x)}{\sqrt[3]{[H(x)]^2}}\right]^n$ es cero. Calcular el grado de: $\dfrac{\sqrt[3]{H(x)}}{Q(x)}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 143

Determine el grado de homogeneidad del siguiente polinomio:

$$P(x\,;y) \equiv xy^{n^{n+1}} - x^{(n+1)^n} + y^{(n^n-1)^n}$$

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

PROBLEMA 144

Cuántos términos posee el polinomio homogéneo.

$P(x\,;y) \equiv x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \ldots\ldots;$ si el grado relativo a "y" es 40.

A) 19 B) 21 C) 23
D) 25 E) 7



PROBLEMA 145

Determine el mínimo grado de homogeneidad diferente de la unidad para el polinomio.

$$P(x\,;\,y\,;\,z) \equiv \sqrt[n]{x^m}\,y^a + \sqrt[m]{x^p}\,z^{3b} + \sqrt[p]{z^n}\,x^{5c}$$

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

PROBLEMA 146

Si: $P(x) \equiv P(1-x)$. Donde: $P(x) \equiv x(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

Calcular: $2a + b$

A) 3 B) 5 C) -4 D) 1 E) 0

PROBLEMA 147

Si el polinomio: $P(x) \equiv (4a+2)x^{2a-30} + (4a)x^{2a-29} + (4a-2)x^{2a-28} + \ldots\ldots\ldots + \Delta$

Es completo y ordenado, según esto halle ud. su grado.

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 29

PROBLEMA 148

Encontrar la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo y ordenado:

$P(x) \equiv a_1x^{n+a_1} + a_2x^{n+a_2} + \ldots\ldots\ldots + a_n$; siendo:

$$a_n = \frac{(n+1)n}{2}\ ;\ n \in \mathbf{N}$$

A) $\frac{n}{2}(n-1)$ B) $\frac{n}{2}(n+1)$ C) $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ D) $\frac{n^2-1}{6}$ E) $\frac{n+3}{5}$

PROBLEMA 149

Si el polinomio es completo y ordenado:

$P(x) \equiv x^{2a+b+c} + x^{a+3b+2c} + x^{a+4b+8c} + x^{2a+b+4c} + \ldots\ldots + \Delta$. Determine su número de términos.

A) 24 B) 26 C) 27 D) 28 E) 29

PROBLEMA 150

Determine la suma de coeficientes del siguiente polinomio

$$P(x;\, y;\, z) \equiv m^2 x^{m-3} y^{7-p} z^{6-n} + n^2 x^{p-n} y^{6-m} z^{n-2} + p^2 x^{n-m} y^{p-3} z^{m-1}$$

A) 16 B) 17 C) 57 D) 67 E) 77

PROBLEMA 151

Si la expresión: $M(x;y) \equiv a^b x^{3a+b} y^{a-b} + dx^{2a-b} y^{b+4} + bcx^c y^d$

Puede reducirse a monomio, encontrar su coeficiente

A) –3/2 B) –1/2 C) –1 D) –2 E) –2/3

PROBLEMA 152

Sabiendo que: $(2x+5)^7 - (x-1)^7 \equiv (x^2+9x+18)\,.\,P(x) + ax + b$

Donde: $P(x) \equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + \ldots\ldots + a_5$

Calcular: $a + \frac{b}{6}$

A) $\frac{2}{3}(4^7+1)$ B) $\frac{3}{2}(4^7+1)$ C) $\frac{2}{3}(4^7-1)$ D) $\frac{3}{2}(4^7-1)$ E) 4325

PROBLEMA 153

Calcular el grado del siguiente polinomio.

$$P(x\,;\,y) \equiv x^{m-4} y^{2m-10} + \sqrt[n-1]{x^3}\, y^{2n-7} + \sqrt[m-n]{xy^3} + x^{5-m} y^{n+7}$$

A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15

PROBLEMA 154

Siendo: $P(x\,;\,y) \equiv 2(mnx+y)x - (n+9)x^2 + (5m-4n)xy$. Un polinomio identicamente nulo, calcular el producto de los valores naturales de "m" y "n".

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 2



PROBLEMA 155

Proporcionar el equivalente de : $\frac{n-c}{a-b}$

sabiendo que: $P(x) <> Q(x)$

$P(x) \equiv m(x+a)^2 + bx + c$;

$Q(x) \equiv ax^2 + mx + n$

A) a B) a/3 C) a/2

D) a/6 E) 1

PROBLEMA 156

La suma de los polinomios:

$P(x) \equiv (a+x)(b+cx) + ax + 4$;

$Q(x) \equiv (x+b)(x+2) + x$

Origina un polinomio de grado cero. Calcular: "$4cb^2$"

A) 9 B) 3 C) –9

D) 3 E) 6

PROBLEMA 157

Si $P(x) \equiv Q(x)$. Siendo $P(x) \equiv x^3 - 4x^n$; $Q(x) \equiv x^{n+2} + (m-2n)x$.

Calcular: $\sqrt{n^2 - m^3}$

A) 9 B) 7 C) 5

D) 3 E) 1

PROBLEMA 158

A un polinomio completo y ordenado de una sola variante y de grado: "4n" se le suprime todos los términosde grado impar, el polinomio resultante tiene "4n–15" términos. Halle "n".

A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA 159

La suma de los siguientes polinomios:

$P(x) \equiv ax^3 + mnpx$;

$Q(x) \equiv (b+c)x^3 - abcx.$

Origina un polinomio identicamente nulo, según esto el equivalente de:

$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3mnp}{abc}$ es:

A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 7

PROBLEMA 160

Si: $P(x\,;y) \equiv x^{a^2-b^2}y^4 + 5x^3y^{ab}$;

$Q(x\,;y) \equiv x^{a^3}y^{b^3} - 2x^{a^2+b^2}y^{-ab}$

Son dos polinomios homogéneos, deducir un valor para:

$$E = \frac{\frac{1}{cb} - 1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$$

A) 9 B) 7 C) 5

D) 1 E) 3

PROBLEMA 161

Sabiendo que: $P(x) \equiv 0$. Calcular "$b^2 - c^2$".

$P(x) \equiv (x^2-1)(x^2-4)(x^2-2) + ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$

A) –147 B) 147 C) –174 D) 174 E) 171

PROBLEMA 162

Si: $a(x+5)^2 - b(x-5)^2 <> (x+5)^2 + 4(2a+b)x$, calcular : "a + b"

A) 9 B) –9 C) 3 D) –3 E) 27

PROBLEMA 163

Si se cumple: $a(ax+y) - b(bx-y) <> 2(6x+y+4)$. Halle usted: "$a^2 + b^2$"

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

PROBLEMA 164

Dados: $P(x) \equiv T(x^4+2)(x^4+3) + A(x^4+4)(x^4+3) + C(x^4+4)(x^4+2)$

$Q(x) \equiv 18x^8 + 7x^4 + 12$. Calcule: " 3T + 6A + 4C" a partir de: $P(x) \equiv Q(x)$

A) –6 B) 9 C) 6 D) –9 E) 12

PROBLEMA 165

Si el polinomio:

$P(x) = (a^2 + 2a^{-1}bc - bc)x^5 + (b^2 + 4ab^{-1}c - ac)x^4 + \sqrt{5}\,(c^2 + 6abc^{-1} - ab)x + (a+b+c-7)$,

se anula para más de seis valores de "x". Calcular:

$$T = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \quad ; \quad \{a, b, c\} \neq 0$$

A) 5 B) –3 C) –5 D) 3 E) 6

PROBLEMA 166

Sabiendo que: $P(x) \equiv Q(x)$. Calcular "a + b + c"



$$P(x) \equiv a(x-1)(x+2) + b(x-1)(x+3) + c(x+2)(x+3);$$

$$Q(x) \equiv 6x^2 + 13x - 7$$

A) 2 B) 6 C) 4 D) 8 E) 16

PROBLEMA 167

Si el equivalente de: $M(x\,;\,y) \equiv \sqrt{(xy)^3 \sqrt[3]{(xy^2)^{2m} \sqrt[4]{(x^n y^2)^m}}}$

Es un monomio cuyo grado relativo a "x" es: 4 y grado relativo a "y" es: 9.
Calcular "m + n"

A) 8 B) –8 C) 4 D) –4 E) 2

PROBLEMA 168

Hallar el grado absoluto de:

$M(x\,;\,y\,;\,z\,;\,w.....) \equiv 5x^7y^{19}z^{37}w^{61}t^{91}$........ Considerar "19" letras.

A) 8000 B) 7999 C) 7899 D) 7539 E) 7989

PROBLEMA 169

Si el siguiente polinomio:

$$P(x\,;\,y) \equiv (b-c)x^{b-n}y^{n+2} + (c-d)x^{c-n}y^{n+3} + (b-d)x^{d-n}y^{n+4}$$

Es homogéneo. Calcular el producto de sus coeficientes

A) 4 B) 6 C) 2 D) 8 E) 10

PROBLEMA 170

Si: $P(x\,;\,y) \equiv (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})x^n + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^{n-1}y + ... + (\sqrt{3}-\sqrt{2})xy^{n-1} + (\sqrt{2}-1)y^{m-16}$

Es un polinomio completo y ordenado con respecto a sus dos variables. Calcular el valor numérico de: " $\sqrt[n]{(n+2)(m-n)}$ ", siendo además la suma de sus coeficientes igual a "n".

A) 2 B) 12 C) 4 D) 8 E) 16

PROBLEMA 171

Calcular "n" si el grado absoluto de la expresión:

$$M(x, y, z) \equiv \frac{\sqrt[4]{x^{2n-2}}\ \sqrt[3]{z^{2n+3}}}{\sqrt[4]{y^{2n}}\ \sqrt[5]{y^{-16}}}$$ es seis:

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA 172

Dado el polinomio:

$P(x\,;y) \equiv x^a + y^{b+c} + x^b y^c + x^c y^b + x^d y^e + x^e y^d$

homogéneo. Calcular el valor de:

E = a + b + c + d + e, sabiendo que la suma de todos los exponentes del polinomio: 42

A) 23 B) 25 C) 21
D) 27 E) 29

PROBLEMA 173

Si: $F(x+1) \equiv 4x - 3$. Halle un: $F(x-2)$

A) $x - 15$ B) $4x - 12$ C) $4x + 15$
D) x E) $4x - 15$

PROBLEMA 174

Si:

$F(x) \equiv x^4 + 2x^2 + 2 \wedge F[G(x)] \equiv x^4 - 4x^2 + 5$.

Calcular G(2)

A) 5 B) 1 C) 3
D) 2 E) 4

PROBLEMA 175

Si: $P(1 - 1/x) \equiv 4x^2 - 2x - 5$. Calcular: P(3)

A) –3 B) 3 C) –1
D) 1 E) –5

PROBLEMA 176

Si: $F(x) \equiv \dfrac{(2x+1)^2 - 1}{8}$.

Calcular: $E = F(x+1) - F(x-1) - 2x$

A) 5 B) 7 C) 8
D) 1 E) 3

PROBLEMA 177

Dado: $P(x) \equiv \dfrac{mx+1}{x-4}$.

Calcular el valor de "m" si: $P[P(x)]$ es independiente de "x".

A) 4 B) 2 C) –1/8
D) –1/2 E) –1/4

PROBLEMA 178

Calcular: $P(-1\ ;\ \sqrt{7}+1)$ del siguiente polinomio homogéneo.

$$P(x\,;y) \equiv x^{a^2+1}y^{b^2} + ay^{a-b}x + 3bx^{a-2b}$$

A) –4 B) $-\sqrt{7}$ C) $\sqrt{7} - 4$
D) $\sqrt{7} + 4$ E) $-\sqrt{7} - 4$



PROBLEMA 179

Calcular: P[F[G(3)]], conociendo:

$$P(x/2-3)\equiv 2x-12\ ;$$

$$P[F(x)+3G(x)]\equiv 24x-21\ ;$$

$$P[2F(x)-G(x)]\equiv 20x-15$$

A) 5 B) 7 C) 12

D) 15 E) 17

PROBLEMA 180

¿Qué ocurre con el valor de "P" si "x" varía de 0,5 a –0,5; $P=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}-x+1}$?

A) Aumentó en 2,4 B) No varía

C) Aumentó en 2,8 D) Disminuye en 1,4

E) Disminuye en 2,4

PROBLEMA 181

Si $P(x^3+x^2)\equiv x^5+x$. Halle usted P(1)

A) 5 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

PROBLEMA 182

Si: $P(x-3)\equiv 5x-7$; $P[F(x)+2]\equiv 10x-7$.
Calcule el valor de : F(–2)

A) –6 B) 3 C) –3

D) 9 E) –9

PROBLEMA 183

$P(x)\equiv x^{3241}-3x^{3240}-3$. Calcular:

$$T=\underbrace{-P(-P(-P.....(}_{108\ \text{veces}}-P(3)).........))$$

A) 3 B) –3 C) 2

D) –2 E) 1

PROBLEMA 184

Si: $F(x)$ es un polinomio tal que:

$P(x)\equiv x^2F(x)+xF(x^2)$, donde:

$P(x)\equiv 8x^3+(a-2)x^2+3x$. Calcular el valor de "a"

A) 7 B) 5 C) 3

D) 9 E) 1

PROBLEMA 185

Si: $F\left(\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{F(x)}{F(y)}$. Halle F(2)

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 186

Si: $F(x+x^{-1})\equiv\sqrt{x^{10}+x^{-10}+8}$. Calcular: $F(\sqrt{3})$

A) 1 B) 5 C) 3

D) 7 E) 9



PROBLEMA 187

Sea "F" función real de variable real, el cual lo definimos así:

I) $F(x) > 0$

II) $F(x-y) = \dfrac{1}{F(x)} - F(y)$

Calcular F(2010).

A) $\sqrt{5}/2$ B) $\sqrt{3}/2$ C) $\sqrt{2}/2$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA 188

Si: $F(x) \equiv \dfrac{25^x}{25^x+5}$. Calcular:

$$F\left(\frac{1}{1001}\right)+F\left(\frac{2}{1001}\right)+......+F\left(\frac{999}{1001}\right)+F\left(\frac{1000}{1001}\right)$$

A) 400 B) 450 C) 500

D) 550 E) 600

PROBLEMA 189

$\forall x \in \mathbf{R} - \{-1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ se define F así:

$F^2(x) \,.\, F(1-x) \equiv x(x-2)$

Calcular "1 – m" de modo que:

$$F(m) = \sqrt[3]{m^2}$$

A) 0,25 B) 0,5 C) 0,75

D) 1 E) 1,25

PROBLEMA 190

Si:

$a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + ...+ a_9x + a_{10} \equiv (2x^2+x+1)^5$

Calcular: $\sum_{n=0}^{5}(a_{2n})$

A) 530 B) 529 C) 528

D) 527 E) 526

PROBLEMA 191

Sea la expresión matemática "Fi", i = 1 ; 2; 3 ; 4; .... definida así:

$F_{i+1} = F_i\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$. Calcular $F_{2000}(2000)$

A) 0 B) 2000 C) $-\dfrac{1}{1999}$

D) 0,9995 E) 1999

PROBLEMA 192

Indicar "n", si el exponente final luego de reducir:

$(....((x^3)^2)...)^{-3} \,.\, x^{2-n} \underbrace{.\,x.......x}_{\mathbf{2n}\text{ veces}} ; x \neq 0$ es 20.

A) 18 B) 20 C) 22

D) 24 E) 28

PROBLEMA 193

Calcular: $M = \dfrac{\sqrt[3]{21+\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6.......}}}}}{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2.......\sqrt{2\sqrt{4}}}}}}$



A) 1 B) 3 C) 9

D) 3/2 E) 3/4

PROBLEMA 194

Indicar el exponente final de "x" al reducir:

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt[4]{x}}}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{x}}{x}}}{x^2}}$$

A) 1/3 B) 2/3 C) 3/4

D) 4/3 E) 5/3

PROBLEMA 195

Calcular "x" que verifique la igualdad:

$$16^{3^{2x}} = 8^{4^{2x}}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2

D) 3 E) 4

PROBLEMA 196

Simplificar:

$$\frac{x^{\left(1+\frac{1}{1}\right)^3\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\cdots\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}}{\left(x^{x+1}\right)^{(x+1)^2}}\ ;\ x \in \mathbb{N}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 197

Luego de resolver:

$\sqrt[3]{3}^{\,x} \cdot \sqrt[9]{9}^{\,x} \cdot \sqrt[27]{27}^{\,x} = \sqrt[27]{81}$ dar el valor de $9x$.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 198

Calcular x^4, si: $x^{x^{x^4}} = 16^{12}$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 16 E) 32

PROBLEMA 199

Calcular "x" de la siguiente igualdad:

$$\frac{9^{x+1}+9^{x-1}}{9} = 82$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 200

Efectuar: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 - x^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$

A) $3\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$ B) $-3\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$ C) $3\left(\frac{1+x^2}{x}\right)$

D) $3\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)$ E) $3\left(\frac{1-x}{x}\right)$



PROBLEMA 201

Efectuar:

$$\sqrt{x+y}\sqrt{x-y}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^4-y^4}+y^4\ ;$$

$x > y$

A) y^4 B) y^2 C) $-x^4$
D) x^4 E) x^8

PROBLEMA 202

Sabiendo que:

$$a=\sqrt{5}-\sqrt{7}\ ;\ b=\sqrt{7}-6\ ;\ c=6-\sqrt{5}$$

Calcular: $F=\dfrac{(a+c)^2(b+c)^2}{a^2b^2}$

A) 1 B) –1 C) 2
D) –2 E) 0

PROBLEMA 203

Si: $P(x)=-2$, calcular el valor de:

$P(1)+P(2)+P(4)+P(8)+......+P(1024)$

A) 22 B) 24 C) –23
D) –24 E) –22

PROBLEMA 204

Siendo: $G(x-3)=5x+m$ y $G(-4)=10$.

Calcular: $\dfrac{m+5}{20}$

A) –1 B)1 C) –2
D) 2 E) –3

PROBLEMA 205

Simplificar:

$$S=\frac{\left(\dfrac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[5]{7}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[3]{11}}\right)^2}{\left(\dfrac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[5]{7}}+\dfrac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[3]{11}}\right)^4-\left(\dfrac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[5]{7}}-\dfrac{\sqrt[5]{7}}{\sqrt[3]{11}}\right)^4}$$

A) 1/8 B) 1/4 C) 1/2
D) 2 E) 4

PROBLEMA 206

Si: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=18$. Calcule: $E=x^3-\dfrac{1}{x^3}$

A) 76 B) 72 C) 64
D) 81 E) 27

PROBLEMA 207

Si se cumple: $\dfrac{a+b}{b+c}+\dfrac{b+c}{a+b}=2$

Calcule: $E=\left(\dfrac{a+1}{c+1}\right)^2+\left(\dfrac{ac+b}{a^2+b}\right)^3$

A) 1 B) 2 C) –1
D) –2 E) 3

PROBLEMA 208

Si: $a-\dfrac{1}{a}=1$



Calcule: $M=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)$

A) 12 B) 13 C) 14

D) 15 E) 16

PROBLEMA 209

Calcular (a + b + c), si el polinomio:

$P(x)=a(3x^2-x+2)+b(2x-1)-c(x^2-x)-6x$

es idénticamente nulo.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

PROBLEMA 210

Calcule F(2), si:

$$F(x^x)=\sqrt[x^x]{\frac{x^{x^{1+2x}}-x^{x^{x+1}}}{x^x+1}}$$

A) 2 B) 1 C) 3

D) 4 E) 6

PROBLEMA 211

Sabiendo que:

$P(x^2+x+1)\equiv Q(x+2)+P(x)+x$

$Q(x)\equiv P(2x-1)+P(2-x)+x$

Calcule: $P(2)+P(-2)$

A) –6 B) 6 C) 4

D) –2 E) 3

PROBLEMA 212

Si: $x_1>x_2>0$ tal que: $x^2=2^{-\frac{2}{\sqrt{x}}}$. Calcular: $x_1\div x_2$

A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) 4 E) 16

PROBLEMA 213

Si x ; y ; z ∈ **R** tal que: $x+y+z=3$ y $x^3+y^3+z^3=9$

Calcular: $\frac{1}{3x+yz}+\frac{1}{3y+xz}+\frac{1}{3z+xy}$

A) 1/2 B) 1 C) 2/3

D) 3 E) 3/4

PROBLEMA 214

Si: $P\left(\frac{1}{x-1}\right)=x+\frac{1}{x}-2$

Calcular: $\sum_{k=1}^{5}P(k)$

A) 7/6 B) 5/6 C) 2/3

D) 4/5 E) 8/5

PROBLEMA 215

Si: $a+\frac{1}{a}=5$

Calcular: $E=\sqrt{\frac{(a^5+a^3)(a^3+a)}{4a^6}}$

A) 5/2 B) 2/5 C) 1
D) 2 E) 5

PROBLEMA 216

Si: $a=\sqrt{3} \wedge b=\sqrt[3]{2}$. Calcular:

$$E=\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{3b^{-2}+a^{-2}}$$

A) 6 B) 12 C) 1
D) 9 E) $\sqrt{16}$

PROBLEMA 217

Calcular: $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$, sabiendo que:

$$a+b+c=3$$
$$a^3+b^3+c^3=30$$
$$abc=4$$

A) 1/4 B) 1/2 C) 1/5
D) 1/3 E) 1/6

PROBLEMA 218

Si: x, y $\in$R tal que:

$$\frac{36}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt{y}}=42-9\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

Calcular: $x+y$

A) 7 B) 25 C) 10
D) 13 E) 20

PROBLEMA 219

Si: $a^3+b^3+c^3=3abc$. Simplificar:

$$E=\frac{a(a^2-bc)+b(b^2-ac)+c(c^2-ab)}{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}$$

A) $a+b+c$ B) $a+b-c$ C) $a-b-c$
D) 0 E) 1

PROBLEMA 220

Si $x>0$ verifica: $x^2-3x+1=0$.

Calcular: $E=x^3+x^2+x^{-2}+x^{-3}$

A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

PROBLEMA 221

Simplificar:

$$E=\frac{(x+5)^2-(x+11)(x-1)}{(x+3)^2-(x+1)(x+5)}$$

A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) –5

PROBLEMA 222

Simplificar:

$$K=\sqrt{\frac{(a^2+2ab-b^2)^2+(a^2-2ab-b^2)^2}{2}}$$

A) a^2-b^2 B) $2a^2$ C) $2b^2$
D) a^2+b^2 E) ab



PROBLEMA 223

Si: $A = (x+1)(x+2)(x+3)$

$B = (x+2)(x+3) + (x+2)(x+4)$

Simplificar: $\dfrac{A - x^3}{B - 5x^2 - 8}$

A) 2 B) 3 C) 1

D) 0 E) x

PROBLEMA 224

Calcular $x^4 - 4x - 4$, si:

$$x = \sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

A) 4 B) 3 C) 1

D) 0 E) –2

PROBLEMA 225

Si $a + b + c = 2p$. Reducir

$E = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2$

A) $a + b + c$ B) abc C) $1 + abc$

D) $a^2 + b^2 + c^2$ E) 1

PROBLEMA 226

Luego de reducir:

$E = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(x^6 + 1)(x^2 - 1)$

Indicar como respuesta $E + 1$

A) 1 B) 0 C) x^6

D) x^2 E) x^{12}

PROBLEMA 227

Dados los números a, b, c tal que $a \neq b \neq c$, además: $(a + b + c)^2 = 3(ab + ac + bc)$

Calcular: $\dfrac{(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$

A) 2 B) 4 C) 8

D) 5 E) 1

PROBLEMA 228

Si: $(a + 2x + b)(a - 2x + b) = (a - b)^2$

Calcular: $\dfrac{(x+a)(x+b)}{a+2x+b} - \dfrac{x^3}{ab}$

A) 11 B) 0 C) 4

D) 2 E) 3

PROBLEMA 229

Si: $a - \dfrac{1}{a} = 2$.

Calcular: $E = (a^2 + a^{-2})(a^3 - a^{-3})$

A) 78 B) 80 C) 82

D) 84 E) 86

PROBLEMA 230

Calcular: $\dfrac{4a+2b}{4a-b}$, sabiendo que:

$$\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2} = 4$$

A) 1 B) 2 C) 3/4
D) 5/3 E) 4

PROBLEMA 231

Si: $\frac{x^4+1}{x^2}=5$. Calcular: x^8+x^{-8}

A) 525 B) 527 C) 526
D) 528 E) 529

PROBLEMA 232

Calcular: $\left(\frac{x+y}{z+w}\right)^{10}$. Sabiendo que:

$2(x+y)^2+2(z+w)^2=(x+y+z+w)^2-(x+y-z-w)^2$

A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 0

PROBLEMA 233

Si: $x=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

Reducir: $E=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

A) 99 B) 100 C) 1000
D) 999 E) 1

PROBLEMA 234

Simplificar: $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$

A) 1 B) 2 C) a
D) b E) ab

PROBLEMA 235

Efectuar:

$$\left(\sqrt[5]{x^4+\sqrt{x^8+y^{10}}}\right)\cdot\left(\sqrt[5]{x^4-\sqrt{x^8+y^{10}}}\right)$$

A) y^2 B) $-y^2$ C) y^4
D) x^2 E) xy

PROBLEMA 236

Simplificar:

$$\frac{(x+9)^2-(x+13)(x+5)}{(x+10)(x+9)-(x+16)(x+3)}$$

A) 21/8 B) 2/7 C) 3/4
D) 8/21 E) 1

PROBLEMA 237

Si : $m+n=1$.

Calcular: $E=3(m^2+n^2)-2(m^3+n^3)$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 238

Si : $\frac{1}{x}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2$; $\frac{1}{y}=1-\left(\frac{a}{b}\right)^2$

Calcular:

$$E=(x+y)(x^2+y^2)+2(1-x)(1-y)$$

A) –1 B) 0 C) 1
D) 2 E) –2

PROBLEMA 239

Si: $x^m - y^n = \dfrac{m}{\sqrt[6]{m+n}}$

$$\sqrt[n]{x}\ \sqrt[m]{y} = \sqrt[mn]{\dfrac{n(2m+n)}{4\sqrt[3]{m+n}}}$$

Calcular: $E = (x^m + y^n)^6$

A) $(m-n)^3$ B) $(m+n)^4$ C) $(m-n)^2$

D) $(m+n)^5$ E) $(m-n)^6$

PROBLEMA 240

Si: $x^3 = 1$; $x \neq 1$. Calcular: $\dfrac{x^8 + x^4}{x^6 + 1}$

A) 1 B) 2 C) 1/2

D) −1/2 E) −2

PROBLEMA 241

Calcular: $\dfrac{x(x^2+3b)}{4a}$;si:

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + b^3}}$$

A) 2 B) 3 C) −1

D) −1/2 E) 1/2

PROBLEMA 242

Si : $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$.

Simplificar: $E = \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3$

A) xy B) xz C) yx

D) xyz E) $\dfrac{1}{xyz}$

PROBLEMA 243

Sabiendo que:

$$a + b + c = 1$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

Calcular $(abc)^{-2}$

A) 4 B) 9 C) 16

D) 36 E) 49

PROBLEMA 244

Calcular:

$$\frac{1}{(a+1)(a^2+1)(a^4+1)} \text{ para } a = \sqrt[8]{2}.$$

A) $\sqrt[8]{2} - 1$ B) $\sqrt[8]{2} + 1$ C) $\sqrt[4]{2} - 1$

D) $\sqrt[4]{2} + 1$ E) 1

PROBLEMA 245

Sabiendo que: $a^2 = (b+1)(a-b)$

$c^2 = (d+1)(c-d)$

Calcular: $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

E&M



PROBLEMA 246

Simplificar:

$$\frac{(a+b+c+d)^3-(a+c)^3-(b+d)^3}{(2a+b+2c+d)^2-(b+d)^2}$$

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{b+c}{4}$ C) $\frac{9(c+d)}{20}$

D) $\frac{a+d}{2}$ E) $\frac{3(b+d)}{4}$

PROBLEMA 247

Si: $2x^{-1}=2-x$. Calcular:

$$E=x^9-(x^4+x^2+1)(x^6+x^3+1)$$

A) –1 B) 1 C) 2

D) –2 E) 3

PROBLEMA 248

Si: $(a+1)(b+1)(c+1)=abc$, proporcionar el equivalente de:

$$1+\frac{2(a+b+c)^3-2}{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}$$

A) abc B) $a+b+c$ C) $(a+b+c)^{-1}$

D) $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}$ E) $ab+ac+bc$

PROBLEMA 249

Si x, y, z, w $\in \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+4y^2+16z^2=8w-21w^2 \end{cases}$$

Determine el valor de "w"

A) 1/21 B) 2/21 C) 4/21

D) 1/7 E) 5/21

PROBLEMA 250

Si x, y, z, w $\in \mathbf{R}^+$ determine el menor valor de:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{z}{w}+\frac{w}{z}+\frac{xy}{zw}+\frac{zw}{xy}$$

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 12

PROBLEMA 251

Si:

$$(\sqrt[5]{a}+\sqrt[5]{b})^2+(\sqrt[5]{a}-\sqrt[5]{b})^2=2\sqrt[5]{32ab}$$

Calcular:

$$N=\frac{15\sqrt[3]{a}+7\sqrt[3]{b}}{11\sqrt[3]{a}}+\frac{8\sqrt[3]{b}}{15\sqrt[3]{a}-7\sqrt[3]{b}}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 252

Qué forma simple adquiere:

$$\frac{x\sqrt{ab}-a-b}{\sqrt{x\sqrt{ab}}-\sqrt{b}}$$ si se sustituye:

$$x=\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+2$$

A) $\sqrt{a}$ B) $\sqrt{b}$ C) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

D) $2\sqrt{a}$ E) $2\sqrt{b}$

PROBLEMA 253

Proporcionar la raíz cuadrada de "N", siendo:

$$N = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ac)^2 - (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2)$$

A) $a + b + c$ B) $ab + bc + ac$ C) $a^2 + b^2 + c^2$

D) $2(ab + bc + ac)$ E) $a^2 + 2b^2 + c^2$

PROBLEMA 254

Efectuar: $N = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$........."n" factores

A) $a^{2^{n+1}} + a^{2^n} + 1$ B) $a^{2n} + a^{2n-1} + 1$ C) $a^{2n} - a^{2^{n-1}} + 1$

D) $a^{2^n} + a^{2^{n-1}} + 1$ E) $a^{n^2} + a^n + 1$

PROBLEMA 255

Determinar el valor de "k" para que la igualdad:

$$k^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + k)^2 - (x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2)$$

Se transforme en una equivalencia:

A) $x + y + z$ B) $2(xy + xz + yz)$ C) xyz

D) $xy + xz + yz$ E) $x^2 + y^2 + z^2$

PROBLEMA 256

Simplificar: $$\frac{(x+a+b+c)(x+a+b+d)-cd}{x+a+b+c+d} - \frac{(x+a+b)(x+a+c)-bc}{x+a+b+c}$$

A) $a + b + c + d$ B) a C) b D) $x + a + b + c$ E) x

PROBLEMA 257

Simplificar: $$\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3+3(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3+3(a-b)(b-c)(c-a)}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

PROBLEMA 258

Que valor se obtiene para:

$$N = a^3 - 3a^2 + 9a - 9$$

Si: $a = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

PROBLEMA 259

Si: $x^2z + y^2x + z^2y = 0$; $xyz \neq 0$

Hallar el valor numérico de:

$$K = \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3}$$

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

PROBLEMA 260

A partir de:

$$x = \sqrt[3]{a + \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \frac{a+1}{3}\sqrt{\frac{8a-1}{3}}}$$

Encontrar un valor más simple de "x"

A) 1 B) $1 + a$ C) $1 - 3\sqrt[3]{a}$
D) $1 - a$ E) 2

PROBLEMA 261

A partir de:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + 4\left(\frac{b}{a}\right)^n = 725 \ ; \ \{a, b\} \subset R^+$$

Calcular: $N = \sqrt[3]{\frac{a^n + 2b^n}{\sqrt{a^n b^n}}}$

A) 1 B) 3 C) 6
D) 9 E) 27

PROBLEMA 262

Si se conoce:

$$\begin{cases} a + b + c = n \\ a^2 + b^2 + c^2 = n^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = n^3 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbf{R}^+$$

Encontrar el valor de:

$$N = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

A) $-2n$ B) $-n^3$ C) $3n^3$
D) n^5 E) $-n^3$

PROBLEMA 263

Dadas las condiciones:

$$\begin{cases} a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 3b^{-1} \\ (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})(a + b + c) = 1 \end{cases}$$

Se pide calcular: $N = a^{-3} - 26b^{-3} + c^{-3}$

A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

PROBLEMA 264

Simplifíquese:

$$\frac{x^3(y-z)^3 + y^3(z-x)^3 + z^3(x-y)^3}{(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3}$$

A) $3xyz$ B) $x^2y^2z^2$ C) $x + y + z$
D) x^2yz E) xyz



PROBLEMA 265

Si se cumple: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=a+b\ ;\ a\neq -b$

Calcular:

$$N=\frac{(a^3+b^3)+(a^2+b^2)(a+b)}{ab(2a-b)}$$

A) 1 B) 2 C) 4
D) 8 E) 6

PROBLEMA 266

Si: $a^4c^2+b^4a^2+c^4b^2=a^3b^2c+c^3a^2b+b^3c^2a\}$
con: $\{a;b;c\}\neq 0$ encontrar un valor real para:

$$N=\frac{a^{15}+b^{15}+c^{15}+5a^5b^5c^5}{a^{10}b^5+a^{10}c^5+b^{10}c^5+a^5b^5c^5}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 267

Si: $n=\sqrt[1]{1}+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+........+\sqrt[2010]{2010}$

Calcular el valor de:

$$a^{2n}b^{2n}c^{2n}\left[\frac{1}{a^{6n}}+\frac{1}{b^{6n}}+\frac{1}{c^{6n}}\right]$$

Sabiendo además:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

A) 2009 B) 1 C) 2010
D) 3 E) F.D

PROBLEMA 268

Si: $x^3+y^3+z^3=3xyz\ ;\ x+y+z\neq 0$
Siendo: x, y, z números reales. Hallar el valor de: $\sqrt{\frac{x^3+y^3+z^3}{(x+y+z)^3}}$

A) 1 B) 1/3 C) 2/3
D) 4/3 E) 3

PROBLEMA 269

Si se cumple: $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}=\frac{4}{x+2y+z}$

Calcular : $N=\frac{x^2+x+z^2-z}{(x+z)^2}$

A) 1 B) 1/2 C) 1/4
D) 3/2 E) 3

PROBLEMA 270

Si: $a^3+b^3+c^3=ab+bc+ac$. Simplificar:

$$\frac{(1-a)bc+(1-b)ac+(1-c)ab}{a(a-b)+b(b-c)+c(c-a)}$$

A) 3 B) $a+b+c$ C) $a^2+b^2+c^2$
D) 1 E) 0

PROBLEMA 271

Si: $N=\frac{x^5(y^3+z^3)(3z^2-xy)}{(x^3+y^3)(3x^2-zy)}$



$$T = \frac{y^5(x^3 + z^3)(3x^2 - yz)}{(y^3 + z^3)(3y^2 - xz)} \quad ; \quad A = \frac{z^5(x^3 + y^3)(3y^2 - xz)}{(x^3 + z^3)(3z^2 - xy)}$$

Calcular: N + T + A conociendo que: $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0$

A) xyz B) $x^3y^3z^3$ C) $x^5 + y^5 + z^5$ D) $x^5y^5z^5$ E) $x + y + z$

PROBLEMA 272

Calcular: $N = a^2 + b^2 + c^2$ siendo la expresión

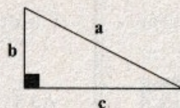
$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2(ab + bc + ac)^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ac)}{(a + b + c)^4 - (a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Igual a: 0,25

A) 2 B) –1 C) 0 D) –2 E) 3

PROBLEMA 273

A partir del gráfico adjunto:



Simplificar: $N = \sqrt{(a + b + c)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}$

A) ab B) bc C) 2bc D) 2ab E) 2ac

PROBLEMA 274

A partir de: $a + b + c + c + 5 = abc = 5$

Encontrar el valor de: $N = ab(a + b)^4 + bc(b + c)^4 + ac(a + c)^4$

A) 15 B) 25 C) 12 D) 75 E) 95

PROBLEMA 275

Si: $x^4 + x^{-4} = 34$. Calcular: $x - x^{-1}$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16



PROBLEMA 276

Proporcionar el valor de:

$$N = (ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1}$$

Sabiendo que: $a^2 + b^2 + c^2 = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 = 24$

$ab + bc + ac = 12$

A) 1/4 B) 1/3 C) 2/3
D) 3/4 E) 1

PROBLEMA 277

Conociendo: $a + b = ab + 2 = 3$

Calcular el valor numérico de: $N = a^5 + b^5$

A) 125 B) 126 C) 123
D) 175 E) 112

PROBLEMA 278

Calcular: $N = \sqrt{a^3 - b^3}$

Conociendo: $a^4 + b^4 - 3 = ab + 3 = 4$

A) 4 B) 8 C) 16
D) 2 E) 1

PROBLEMA 279

Encontrar el valor numérico de "xyz" a partir de los siguientes datos:

$$x + y + z = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 13$$

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 17$$

A) 1 B) 3 C) 5
D) 7 E) 9

PROBLEMA 280

Si: $a - b = b - c = \sqrt[7]{7}$

Proporcionar el valor numérico de:

$$N = \frac{(a-c)^7 + (b-c)^7 + (a-b)^7}{70}$$

A) 7 B) 70 C) 65
D) 13 E) 128

PROBLEMA 281

Que valor adopta la expresión:

$a^3 + b^3 + c^3 - \sqrt{x^3 + 2y^3 - 3xy^2}$ cuando se sustituyen:

$x = a^2 + b^2 + c^2 \quad \wedge \quad y = ab + bc + ac$

A) abc B) a + b + c C) 3abc
D) $a^2 + ab + b^2 + ac + c^2$ E) F.D.

PROBLEMA 282

Conociendo: $x^2 - 3x + 1 = 0$

Calcular el valor de:

$$\left[x^x + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\right]\left[x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

A) 18 B) 20 C) 16
D) 22 E) 24

PROBLEMA 283

Si: $a+b+c=n$

$ab+bc+ac=2n^2$

$abc=3n^3$

Hallar el valor numérico de :

$$\frac{abc(a+b)(b+c)(a+c)}{(a^3+b^3+c^3)^2}$$

A) 3/8 B) –3/8 C) 3

D) –3/16 E) 3/4

PROBLEMA 284

Si: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ con:

$\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$

Calcular el valor numérico de:

$$\frac{(a+b+c)^6-(a^6+b^6+c^6)}{a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3}$$

A) 1 B) –1 C) 2

D) 4 E) 3

PROBLEMA 285

Si: $\sqrt{2x}+2\sqrt{1-x-y}+\sqrt{3y}=3$

Con $\{x ; y\} \subset \mathbf{R}$ encontrar el valor numérico de: $x-3xy+y$

A) 3/2 B) 2/3 C) 1/3

D) 3 E) 2

PROBLEMA 286

Si : $\frac{a-b}{ac}+\frac{b-c}{ab}=\frac{a-c}{bc}$

Con $\{a, b, c\} \subset \mathbf{R}$ qué valor se obtiene para:

$$\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+c^2)+a^2b^2c^2}{(ab+bc+ac)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)}$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

PROBLEMA 287

Si: $\{x, y, z\} \subset \mathbf{R}$ proporcionar el máximo valor de: $x+2y+3z$ sabiendo que:

$$7(x^2+y^2+1)=9-7z^2$$

A) 4 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) 2 E) 14

PROBLEMA 288

Si $x+y+z+w=2a$

Simplificar:

$$\frac{(a-x)^2+(a-y)^2+(a-z)^2+(a-w)^2}{(x+y)^2(x-y)^2+(z+w)^2+(z-w)^2}$$

A) 1 B) 2 C) 1/2

D) –1/2 E) –1

PROBLEMA 289

Si: $x=a+b+c+d$; $y=a+b-c-d$;

$z=a-b+c-d$; $w=a-b-c+d$



Indicar el valor de:

$$\frac{xy(x^2+y^2)-zw(z^2+w^2)}{ab(a^2+b^2)-cd(c^2+d^2)}$$

A) 1 B) 4 C) 9
D) 16 E) 25

PROBLEMA 290

Si: $F(x) \equiv a^x + b^x + c^x$

Siendo $F(1)=0$. Calcular aproximadamente el valor de:

$$\frac{F(7)\cdot F(3)}{[F(5)]^2}+\frac{[F(7)]^2}{[F(4)][F(5)]^2}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

PROBLEMA 291

Si: $ab=1$; qué valor asume:

$$a\sqrt{\frac{b^2+1}{a^2+1}}+b\sqrt{\frac{a^2+1}{b^2+1}} \quad ; \{a, b\} \subset \mathbf{R}^+$$

A) 1 B) 2 C) –2
D) 0 E) 1/2

PROBLEMA 292

Encontrar el equivalente de: $\sqrt[5]{\dfrac{a^5-2b^5}{\sqrt{3}}}$

Sabiendo que: $a^{10}.b^{-10}+16a^{-10}.b^{10}=41$

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{2ab}$ C) ab
D) $\sqrt[5]{ab}$ E) 1

PROBLEMA 293

Sean a, b $\wedge$ c tres números reales positivos que verifican:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=6$$

Calcular el valor de:

$$\sum_{n=2}^{m} n.\sqrt[n]{\frac{(a+b+c)^{n+1}}{a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}}}$$

A) $\frac{3}{2}m(m+2)$ B) $\frac{m}{2}(m-1)$

C) $\frac{3}{2}(m-1)(m+2)$ D) $\frac{3}{2}$

E) $\frac{3m}{2}(m+1)$

PROBLEMA 294

Si:

$$\begin{cases} \dfrac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{6}=-\dfrac{abc}{a+b+c} \\ (ab)^6+(bc)^6+(ac)^6=18 \end{cases}$$

Calcular: $\sqrt{a^{12}+b^{12}+c^{12}}$

A) 4/3 B) 3 C) 4
D) 2/5 E) 6

PROBLEMA 295

Calcular el valor de: $\dfrac{4(a^8+b^8)}{(a^2b^2)^2}$



Sabiendo que: $\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}=3(a-b)$

A) 4 B) 8 C) 2
D) 1 E) 0

PROBLEMA 296

Teniendo en cuenta que:

$$\sqrt[9]{\frac{a^2}{b^2}}+\sqrt[9]{\frac{a}{c}}+\sqrt[9]{\frac{b^2}{c^2}}=0$$

Calcular el valor de: $\left(\frac{ac}{b^2}\right)^9-\left(\frac{b^2}{ac}\right)^9$

A) 0 B) $\sqrt{2}$ C) 9
D) −1/3 E) −81

PROBLEMA 297

Si: $a^3-b^3-c^3=3abc$; $a\neq -b\neq -c$. Es correcto que:

A) $a+b+c=0$ B) $\frac{a+b}{2}=c$

C) $\frac{b+c}{a}=1$ D) $a=b=c$

E) $\frac{a+c}{b}=1$

PROBLEMA 298

Si: $a=\sqrt[3]{1+\sqrt{11}}$

$b=\sqrt[3]{1-\sqrt{11}}$

$c=\sqrt[3]{5}$

Qué valor asume:

$$\frac{a^{27}+b^{27}+c^{27}-3a^9b^9c^9}{a^{18}+b^{18}+c^{18}-3a^6b^6c^6}$$

A) 40 B) 71 C) 120
D) 193 E) 234

PROBLEMA 299

Si: $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=ab+bc+ac=1$

Donde: $abc\neq 0$. Halle el valor de:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{bc}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{ac}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{c}}{ab}\right)^2$$

A) 1 B) $a+b+c$ C) 3

D) abc E) $\frac{1}{abc}$

PROBLEMA 300

Si: $\sqrt{x-y+4}+\sqrt{3y-3x-9}=2$

Siendo $x \wedge y$ dos números reales. Qué valor asume: $\frac{x+4y}{x+3}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Claves

1. A	31. A	61. A	91. A	121. C	151. A	181. E	211. A	241. D	271. C
2. D	32. D	62. B	92. C	122. E	152. C	182. E	212. D	242. E	272. C
3. B	33. A	63. C	93. E	123. C	153. C	183. A	213. B	243. D	273. C
4. E	34. B	64. D	94. D	124. D	154. B	184. B	214. B	244. A	274. D
5. B	35. C	65. A	95. E	125. E	155. C	185. B	215. A	245. A	275. B
6. D	36. C	66. E	96. D	126. E	156. C	186. C	216. B	246. E	276. D
7. B	37. A	67. B	97. C	127. C	157. D	187. C	217. A	247. B	277. C
8. A	38. C	68. B	98. B	128. E	158. E	188. C	218. D	248. B	278. D
9. D	39. A	69. C	99. C	129. A	159. D	189. A	219. A	249. C	279. C
10. D	40. B	70. B	100. A	130. C	160. D	190. C	220. B	250. C	280. D
11. D	41. A	71. C	101. C	131. D	161. A	191. D	221. D	251. C	281. C
12. A	42. C	72. D	102. C	132. B	162. A	192. A	222. D	252. E	282. B
13. D	43. A	73. A	103. A	133. E	163. B	193. D	223. C	253. B	283. D
14. A	44. C	74. A	104. C	134. B	164. C	194. D	224. D	254. D	284. C
15. C	45. B	75. E	105. C	135. D	165. C	195. C	225. D	255. D	285. B
16. B	46. D	76. B	106. A	136. E	166. C	196. A	226. E	256. C	286. A
17. E	47. A	77. C	107. D	137. A	167. A	197. B	227. B	257. A	287. D
18. B	48. B	78. A	108. D	138. A	168. B	198. C	228. B	258. E	288. C
19. B	49. D	79. A	109. C	139. B	169. C	199. B	229. D	259. A	289. D
20. D	50. C	80. B	110. B	140. D	170. C	200. A	230. B	260. A	290. B
21. B	51. E	81. E	111. B	141. C	171. B	201. D	231. B	261. B	291. B
22. C	52. B	82. A	112. D	142. A	172. C	202. A	232. D	262. E	292. A
23. B	53. B	83. B	113. E	143. D	173. C	203. E	233. D	263. E	293. C
24. A	54. D	84. E	114. B	144. B	174. B	204. B	234. B	264. E	294. E
25. E	55. C	85. D	115. E	145. D	175. C	205. A	235. B	265. E	295. B
26. E	56. C	86. A	116. C	146. E	176. D	206. A	236. D	266. B	296. A
27. D	57. E	87. C	117. C	147. A	177. E	207. B	237. A	267. D	297. C
28. C	58. B	88. B	118. D	148. C	178. E	208. A	238. A	268. B	298. D
29. B	59. C	89. C	119. B	149. A	179. D	209. B	239. C	269. B	299. D
30. B	60. C	90. B	120. B	150. E	180. E	210. A	240. D	270. B	300. E

E&M

- Potencias en R
- Radicales en E
- Ecuaciones trascendentes
- Expresión algebraica (E.A)
- Grado de las expresiones algebraicas
- Valor numérico de expresiones algebraicas
- El polinomio
- Polinomios idénticos
- Polinomios especiales
- Productos notables
- Ejercicios de aplicación
- Problemas resueltos
- Problemas propuestos

Colección Lambda

- **Leyes de exponentes, ecuaciones exponenciales, polinomios, productos notables.**
- **División algebraica, factorización, MCD y MCM de polinomios.**
- **Fracción algebraica, radicación, racionalización.**
- **Factorial, número combinatorio, binomio de Newton.**
- **Análisis combinatorio, probabilidades.**
- **Números complejos.**
- **Ecuaciones.**
- **Ecuaciones II.**
- **Números reales, desigualdades e inecuaciones.**
- **Relaciones y funciones.**
- **Función exponencial y logarítmica.**
- **Limites y derivadas.**
- **Sucesiones y serie.**
- **Matrices y determinantes.**
- **Programación lineal.**





Jr. Rufino Torrico 889 Of. 208 - Cercado de Lima
Telefax: 332-4110 / 726-4141
RPC: 989-101631 / 997-894292 RPM: #995-739126
www.editorialmegabyte.com